This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

QC
125
.R429 tu
1895

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

ΙΩ ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

1909 4·7

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

COMPRENANT

LES LEÇONS PROFESSÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR H. RESAL,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES MINES, MEMBRE DE L'INSTITUT.

DEUXIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE.

TOME PREMIER.

Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

(Tous droits réservés.)

Alex, Ziwet
gt. 2 vols.
8-31-1922

AVANT-PROPOS.

Depuis l'époque où a paru la première édition du Tome I de cet Ouvrage, des modifications importantes ont été apportées dans l'enseignement de la Mécanique; les programmes ont été changés et étendus, et de nouvelles et intéressantes questions ont surgi. Il est vrai que, sur ces entrefaites, nous avons comblé une partie des lacunes qui s'étaient produites en publiant notre Tome VII, qui continuera à être un complément de l'édition actuelle, dans laquelle on retrouvera quelques traces de la première. Il nous paraîtrait superflu de faire une analyse complète des matières contenues dans ce Volume; nous croyons devoir nous borner à en signaler quelques points principaux.

Dans la Cinématique, qui continue à former la première Partie, nous avons exposé uniquement les questions qui sont utiles en Mécanique; le lecteur qui s'intéresse aux applications à la Géométrie pourra consulter l'Appendice du Tome VII. Nous ferons remarquer qu'une formule nouvelle, à laquelle nous sommes parvenu il y a peu de temps, basée sur les matières de notre *Exposition de la théorie des surfaces,* nous a permis de donner à la théorie du roulement des surfaces une forme plus élégante que dans le Volume

406315

précité. Nous avons cru devoir faire suivre la théorie géométrique des mouvements relatifs d'une démonstration analytique du théorème de Coriolis.

Nous arrivons maintenant à la seconde Partie, qui constitue la Mécanique proprement dite.

Nous avons donné de l'extension aux applications de la méthode de la variation des constantes arbitraires au mouvement plan d'un point.

Nous avons renvoyé au Tome VII : 1° pour la solution de quelques problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe; 2° la théorie des tautochrones; 3° la théorie des brachistochrones basée sur le calcul des variations.

Quant aux brachistochrones, nous nous sommes borné à exposer des considérations géométriques analogues à celles sur lesquelles se sont appuyés Jean Bernoulli et Euler, mais en nous plaçant à un point de vue général au lieu de nous restreindre au cas de la pesanteur.

La question du mouvement d'un point matériel sur une surface fixe a été élucidée en nous basant sur notre *Exposition de la théorie des surfaces,* à laquelle nous renvoyons pour la mise en équations des lignes géodésiques en coordonnées rectilignes. Nous renvoyons également au Tome VII pour l'établissement des théorèmes de Joachim Stahl et de Gudermann relatifs aux lignes géodésiques des ellipsoïdes, où l'on ne fait qu'un appel minime à la Mécanique; nous renvoyons aussi au même Volume pour la mise en équations en coordonnées cylindriques, et les applications qui en résultent du mouvement d'un point matériel sur une surface.

Après quelques préliminaires, nous avons débuté en Statique par l'étude des systèmes à liaisons. Les équations de l'équilibre d'un solide libre ont été déduites du principe du travail virtuel; la question des forces équivalentes a été traitée par le calcul, ce qui est bien plus simple que la méthode géométrique, d'ailleurs implicitement comprise dans le programme de l'enseignement secondaire.

Nous ne sommes pas revenu sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point matériel, parce que nous avons traité cette question au point de vue de Chasles dans notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, et au point de vue de Gauss, au Tome VII.

A propos de l'article consacré aux systèmes articulés, nous mentionnerons une étude complète des balances de Roberval et de Sanctorius.

Nous n'avons appliqué les équations du mouvement d'un fil qu'aux petits mouvements d'une chaînette.

En arrivant au mouvement d'un système matériel, nous avons établi directement les équations de Lagrange, sans passer par un théorème intermédiaire d'Hamilton, comme nous l'avons fait au Tome VII, auquel nous avons renvoyé, d'ailleurs, pour les applications autres que celle du pendule conique. Nous n'avons pas cru devoir exposer le principe de la moindre action, réduit actuellement à l'état de curiosité mathématique, et qui, d'ailleurs, a été établi au Tome VII; toutefois nous avons pensé qu'il serait bon de donner le théorème de Gauss, quoiqu'il n'offre pas d'autre intérêt que le principe ci-dessus, mais parce qu'il n'a été mentionné dans aucun de nos Ouvrages.

Dans le Volume précité nous avons exposé, avec quelques

simplifications, la méthode employée par Bour en vue d'étendre les équations de Lagrange au mouvement relatif; ici nous lui avons substitué celle de Ph. Gilbert. Les équations de Bour sont peu utiles, et nous nous sommes borné, comme application, à en tirer le théorème de Coriolis.

Arrivons maintenant au mouvement d'un solide autour d'un point fixe; nous renvoyons au Tome VII pour les développements relatifs à l'herpolhodie qui n'ont qu'un caractère purement spéculatif, mais nous avons donné quelques explications sur l'ingénieux appareil de MM. Darboux et Kœnigs, qu'ils ont appelé *herpolhodographe*.

Nous avons établi la condition qui doit être remplie pour que l'équilibre de l'axe de la toupie gyroscopique soit stable.

Comme exemple du mouvement d'un corps libre, nous nous sommes borné à établir les équations fondamentales du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

Dans le dernier Chapitre, qui est consacré au mouvement relatif d'un solide, nous avons cru devoir, pour simplifier les calculs ultérieurs : 1° opérer la réduction des forces centrifuges d'un solide de révolution tournant autour d'un axe fixe, lorsque son axe de révolution rencontre l'axe de rotation; 2° réduire les forces centrifuges du solide ci-dessus, lorsqu'il est, de plus, animé d'une rotation autour de son axe de figure; la démonstration nouvelle du théorème auquel donne lieu cette réduction est beaucoup plus simple que la démonstration géométrique qui nous avait servi à l'établir (1851).

Le problème du gyroscope terrestre de Foucault a reçu deux solutions : la première, basée sur les principes des mouvements absolus et relatifs; la seconde, qui est presque im-

médiate, sur la réduction des forces centrifuges composées. Pour terminer, nous avons donné une théorie nouvelle du pendule gyroscopique de M. Sire.

Nous croyons avoir donné une théorie complète et aussi simple que possible du choc de deux corps, quelle qu'en soit la nature.

Nous avons hésité à exposer les principes de l'*Astatique* dont on s'est beaucoup occupé depuis quelques années, branche secondaire de la Statique des solides, et dont le caractère est purement géométrique. C'est pourquoi nous nous sommes borné à en faire mention dans un Appendice.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

AVANT-PROPOS V

PREMIÈRE PARTIE.

DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ INDÉPENDAMMENT DE SES CAUSES.

CHAPITRE I.

DE LA VITESSE D'UN POINT.

Nos

1. Système invariable 1
2. Objet de la Mécanique 2
3. Trajectoire; élément de chemin 2
4. Mouvement uniforme 2
5. Mouvement varié 2
6. Vitesse angulaire 3
7. Mouvement uniformément varié 3
8. Chute verticale des corps pesants dans le vide 4
9. Chutes successives de deux points pesants 5
10. Ascension d'un point pesant dans le vide 6
11. Projection d'une vitesse sur une droite 6
12. Projection d'une vitesse sur un plan 8
13. Des mouvements simultanés 8
14. Composition de deux vitesses simultanées 8
15. Composition de trois vitesses simultanées 10
16. Composition d'un nombre quelconque de vitesses simultanées 10
17. Des sommes et des différences géométriques 11
18. Des produits géométriques 12
19. Des moments 13
20. Composition et décomposition des moments 14

CHAPITRE II.

DES MOUVEMENTS GÉOMÉTRIQUES DES SYSTÈMES INVARIABLES.

§ I. — *Mouvements de translation, de rotation et de roulement.*

N°s Pages
21. Mouvement de translation ou translatoire..... 16
22. Mouvement de rotation ou gyratoire..... 16
23. Mouvement de glissement..... 16
24. Mouvement de roulement..... 16

§ II. — *Du mouvement d'un système invariable parallèle à un plan.*

25. Centre et axe instantanés de rotation..... 18

§ III. — *Du mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.*

26..... 19

§ IV. — *Composition des translations et des rotations.*

27. Composition des translations..... 20
28. Composition des rotations autour d'axes parallèles..... 20
29. Composition de deux rotations. Couple de rotation..... 20
30. Composition d'un nombre quelconque de rotations..... 22
31. Décomposition d'une rotation..... 22
32. Composition d'une rotation et d'une translation..... 23
33. Mouvement le plus général d'un système invariable..... 24
34. Composition des rotations autour d'axes concourants..... 25
35. Composition des rotations autour d'axes ayant des directions quelconques..... 26
36. Projections de la vitesse d'un point résultant d'une rotation sur trois axes rectangulaires..... 27

§ V. — *Du roulement, l'une sur l'autre, des surfaces de deux solides, quelles que soient leurs formes.*

37. Digression sur quelques points de la théorie des surfaces..... 27
38. Roulement d'une surface sur un plan..... 30
39. Roulement d'une surface sur une autre..... 31
40. Application à l'engrenage sans glissement..... 32

CHAPITRE III.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT.

41. De l'accélération d'un point..... 34
42. Intégrales géométriques..... 34
43. Projection orthogonale ou oblique de l'accélération sur une droite ou un plan..... 35

Nos Pages
44. Composition des accélérations..... 35
45. Composantes tangentielle et normale de l'accélération..... 37
46. Expression de l'accélération..... 38
47. Déviation due à l'accélération; application à la Lune..... 39
48. Équations du mouvement d'un point dont l'accélération est donnée... 43
49. Théorèmes relatifs aux moments et aux aires..... 43
50. Relation entre l'accroissement du carré de la vitesse et l'intégrale du produit géométrique de l'accélération par le chemin élémentaire. 45
51. Sur une locution employée en Mécanique..... 46
52. Du mouvement des projectiles pesants dans le vide..... 47

CHAPITRE IV.

DES ACCÉLÉRATIONS CENTRALES.

53. Équations du mouvement d'un point dont l'accélération passe constamment par un centre fixe..... 49
54. Application au mouvement elliptique des planètes..... 50
55. Nature de l'orbite décrite par un point dont l'accélération, dirigée vers un centre fixe, varie en raison inverse du carré de la distance à ce centre..... 51
56. Mouvement d'un point dont l'accélération dirigée vers un centre fixe est proportionnelle à la distance à ce centre..... 55

CHAPITRE V.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

57. Accélération angulaire d'un système invariable mobile autour d'un point fixe..... 58
58. Sa projection sur un axe fixe dans le système..... 59
59. Composantes de l'accélération d'un point du système suivant trois axes rectangulaires fixes dans le système..... 60
60. Accélération d'un point d'un système libre..... 60

CHAPITRE VI.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT PAR RAPPORT A UN SYSTÈME INVARIABLE.

61. De l'accélération dans le mouvement relatif d'un point par rapport à un système invariable..... 61
62. Composition des accélérations centrifuges composées..... 63
63. Équations différentielles du mouvement relatif d'un point..... 63
64. Accélération apparente de la pesanteur à la surface de la terre..... 64

Nos Pages
65. Mouvement apparent d'un point pesant..... 65
66. Sur l'établissement des équations du mouvement relatif par la transformation de coordonnées..... 68

DEUXIÈME PARTIE.

DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS ET DE SES CAUSES.

CHAPITRE I.

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL.

§ I. — *Considérations générales.*

1. Point matériel, principe de l'inertie, force..... 71
2. Masse d'un point matériel..... 72
3. De l'action simultanée de plusieurs forces..... 73
4. Composantes tangentielle et centripète de la force..... 73
5. Objet de la Mécanique relativement au point matériel..... 73
6. Égalité de l'action et de la réaction..... 74
7. Application à la gravitation..... 74
8. Accélération absolue de la pesanteur..... 75
9. Du travail des forces appliquées à un point matériel..... 75
10. Équations du mouvement d'un point matériel..... 77
11. De la force ou réaction de l'inertie..... 78
12. Des forces apparentes dans le mouvement relatif..... 79

§ II. — *Mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant.*

13. Généralités..... 80
14. Mouvement vertical d'un point pesant..... 80
15. Courbe balistique..... 83

§ III. — *Intégration par approximation des équations du mouvement plan d'un point par la méthode de la variation des constantes arbitraires.*

16. Généralités..... 87
17. Formules relatives à une force centrale et à une force perturbatrice.. 89
18. Mouvement d'une planète dans un milieu résistant..... 90
19. Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale, attractive, proportionnelle à la distance et à celle d'une force perturbatrice..... 93
20. La force perturbatrice est la résistance d'un milieu..... 95

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE LIGNE FIXE.

§ I. — *Généralités. Questions diverses.*

Nos Pages
21. Préliminaires 98
22. Mouvement d'un point pesant sur une ligne 100
23. » » sur un plan incliné 100
24. » » sur un cercle vertical 101
25. Des petites oscillations du pendule simple 102
26. Mouvement d'un point pesant sur la cycloïde 103
27. Mouvement du pendule simple dans le vide, quelle que soit son amplitude 104
28. Mouvement du pendule dans un milieu résistant 107
29. Mouvement relatif d'un point pesant sur une ligne dont le plan est vertical, et qui tourne uniformément autour d'un point fixe 109
30. Tautochrones en général 111

§ II. — *Des brachistochrones.*

31. Exposé 111
32. Principes fondamentaux 111
33. Équations générales des brachistochrones 114
34. Une surface synchrone est normale aux arcs isochrones 117
35. Brachistochrone dans le cas de la pesanteur 118
36. Brachistochrone dans le cas d'une accélération centrale proportionnelle à la distance 119

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE.

37. Considérations géométriques 121
38. Développements analytiques 122
39. Pendule conique 125
40. Effet de la résistance de l'air sur le mouvement du pendule conique.. 131
41. Influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule.... 131

CHAPITRE IV.

DES SYSTÈMES MATÉRIELS.

§ I. — *Généralités.*

42. Constitution des corps 137
43. Pression intérieure 138

Nos Pages
44. Centre de masse 139
45. Des moments d'inertie 144

CHAPITRE V.

STATIQUE.

§ I. — *Préliminaires. — Systèmes à liaisons.*

46. Équations générales 153
47. Systèmes à liaisons 154

§ II. — *Équilibre des forces appliquées à un corps solide.*

48. Équations d'équilibre 157
49. Des forces équivalentes 159
50. Attraction des sphères suivant la loi de l'inverse du carré de la distance 163

§ III. — *De l'équilibre des forces appliquées à un solide assujetti à certaines conditions.*

51. Le solide repose sur un plan 168
52. Il ne peut se déplacer qu'autour d'un axe fixe 168
53. Il est assujetti à tourner autour d'un point fixe 169

§ IV. — *Des systèmes articulés.*

54. Systèmes à liaisons complètes 169
55. Stabilité et sensibilité de la balance ordinaire 170
56. Balance de Roberval 171
57. Balance de Quintenz 172
58. Balance de Sanctorius 174
59. Pont-levis à flèche 175
60. Du genou 176

§ V. — *Des systèmes funiculaires.*

61. Tension 177
62. Forme d'équilibre d'un polygone funiculaire 178
63. Application à la détermination des centres de gravité 181
64. Forme des câbles des ponts suspendus 181
65. Courbes funiculaires 183
66. Fil sollicité par des forces parallèles élémentaires 187
67. Chaînette 189
68. Fil dont chaqne élément est sollicité par une force verticale proportionnelle à la projection horizontale de l'élément 195

Nos Pages
69. Forme d'équilibre d'un fil soumis à une pression normale..... 195
70. Forme d'équilibre d'un fil dont les éléments sont sollicités par des forces proportionnelles à une fonction de la distance à un axe fixe 197
71. Mouvement d'un fil..... 201

CHAPITRE VI.

DYNAMIQUE.

§ I. — *Équations générales de la Dynamique. — Systèmes à liaisons.*

72. Équations générales 206
73. Systèmes à liaisons..... 208
74. Équations de Lagrange 210
75. Application des équations de Lagrange au pendule conique..... 212
76. Extension des équations de Lagrange au mouvement relatif..... 213
77. Théorème de Gauss..... 215
78. Stabilité de l'équilibre d'un système à liaisons..... 217
79. Petits mouvements d'un système à liaisons..... 218
80. Mouvement d'un système à liaisons lorsque les forces produisent dans un temps très court des variations notables dans les vitesses..... 222

§ II. — *Du mouvement d'un système libre.*

81. Équations de translation et de rotation..... 224
82. Forces qui produisent dans un temps très court des variations notables des vitesses..... 227
83. Mouvement d'un système matériel par rapport à un point mobile 227
84. Mouvement d'un système matériel dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles 228

CHAPITRE VII.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

§ I. — *Du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.*

85. Formules générales 231
86. Pendule composé 233
87. Frappe-talon 235
88. Mouvement d'un treuil 236
89. Actions mutuelles des corps solides tournant autour d'axes parallèles 236
90. Mouvement d'une chaîne pesante sur un double plan incliné..... 237

§ II. — *Du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

N°s Pages
91. Préliminaires 238
92. Equations du mouvement du solide 239
93. Conditions pour que, dans le cas où le moment des forces extérieures est nul, l'axe instantané de rotation reste fixe dans le solide 240
94. Position à un instant quelconque du solide par rapport à trois axes fixes 241
95. Mouvement d'un solide lorsqu'il n'est sollicité par aucune force 244
96. Interprétation géométrique 247
97. Stabilité des axes permanents de rotation 251
98. Mouvement d'un solide lorsque son ellipsoïde d'inertie est de révolution 253
99. Emploi d'axes mobiles dans le cas précédent 253
100. Toupie gyroscopique 255
101. Des efforts à développer pour déplacer l'axe d'un solide de révolution animé d'un mouvement gyratoire 261

§ III. — *Du mouvement d'un solide libre.*

102. Généralités 263
103. Application à la terre 263

§ IV. — *Du mouvement d'un solide pesant de révolution reposant sur un plan horizontal.*

104. 266
105. Toupie 266
106. Le solide est tangent au plan 267

CHAPITRE VIII.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN SYSTÈME INVARIABLE.

107. 270
108. Lemmes 270
109. Gyroscope terrestre de Foucault 272
110. Pendule gyroscopique 274

CHAPITRE IX.

DU CHOC DES CORPS SOLIDES.

111. 278
112. Travail perdu dans la première partie du choc 279

Nos Pages
113. Demi-accroissement de la force vive après le choc..... 280
114. Choc de deux corps libres..... 281
115. Choc direct. — Applications..... 286
116. Choc de deux corps dont l'un est libre et l'autre assujetti à tourner autour d'un axe fixe..... 290
117. Pendule balistique..... 292
118. Du recul dans les armes à feu. — Fusil-pendule..... 293

APPENDICE.

Astatique..... 295

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

PREMIÈRE PARTIE.

DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ INDÉPENDAMMENT DE SES CAUSES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE D'UN POINT.

1. Un *système invariable* est un ensemble de points dont les distances mutuelles restent constantes. Tout point étranger au système, dont les distances aux points de ce système restent constantes, peut être considéré comme faisant partie du système. On peut donc concevoir que le système est continu et s'étend indéfiniment en tous sens, ou constitue ce qu'on peut appeler un *milieu géométrique*.

L'espace peut être considéré comme étant un système invariable dans lequel on concevra qu'on ait tracé trois axes rectangulaires OX, OY, OZ déterminés par quatre points du système.

Un point m d'un corps, que renferme l'espace, est en *repos* ou en *mouvement* selon que ses coordonnées X, Y, Z restent constantes ou varient successivement.

Concevons un système invariable (S) dont tous les points sont en mouvement, et traçons dans le système trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz déterminés par quatre de ses

points. Le point m sera en *repos relatif* ou en *mouvement relatif* selon que ses coordonnées x, y, z resteront constantes ou varieront successivement.

2. La *Mécanique* a pour objet l'étude du mouvement et de ses causes. Elle se divise en deux branches principales :

1° La *Cinématique,* dont nous nous occuperons uniquement dans cette première Partie, a pour objet l'étude du mouvement considéré en lui-même, c'est-à-dire indépendamment de ses causes; son caractère est essentiellement rationnel;

3° La *Dynamique,* dont il sera question plus tard, où l'on fait intervenir les causes du mouvement. Elle est basée sur des principes élémentaires déduits de l'expérience ou de l'observation. Elle a été distraite de la Physique en raison des grands développements qu'elle a pris.

3. Nous étudierons en premier lieu le mouvement d'un point faisant ou non partie d'un système invariable.

Le lieu des positions successives du point a reçu le nom de *trajectoire.*

L'*élément de chemin* ou *chemin élémentaire* est l'arc infiniment petit de la trajectoire décrit dans l'élément dt du temps.

Nous prendrons le mètre pour unité de longueur et la seconde du temps moyen pour unité de temps.

4. *Mouvement uniforme.* — Dans ce mouvement, le chemin parcouru s croît proportionnellement au temps. Si l'on mesure le chemin parcouru à partir de la position occupée par le point mobile à l'origine du temps, on peut écrire

$$s = \mathrm{V}t,$$

V étant une constante qui représente le chemin parcouru dans l'unité de temps et qui a reçu le nom de *vitesse.*

5. *Mouvement varié.* — Le mouvement est varié quand le chemin parcouru ne croît pas proportionnellement au temps. On a ainsi une expression de la forme

$$s = f(t).$$

La *vitesse* à l'instant t dans ce mouvement est celle qui ré-

sulte de l'hypothèse d'un mouvement uniforme dans le parcours du chemin élémentaire ds; de sorte que l'on a

$$V = \frac{ds}{dt},$$

et la vitesse est ainsi la *dérivée du chemin parcouru par rapport au temps.*

Si la vitesse est donnée en fonction du temps, on a pour déterminer s

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} V\,dt,$$

en désignant par s_0 le chemin parcouru à l'instant t_0.

6. *Vitesse angulaire.* — Concevons qu'un point parcoure un cercle de rayon r avec la vitesse V; tous les points du rayon décrivant des arcs semblables, leurs vitesses sont proportionnelles aux distances au centre; de sorte que si ω est la vitesse du point du rayon situé à l'unité de distance du centre, ou ce que l'on appelle la *vitesse angulaire*, on a

$$V = \omega r$$

et

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

θ étant l'angle formé par le rayon mobile avec un rayon déterminé.

7. *Mouvement uniformément varié.* — Dans ce mouvement la vitesse croît ou décroît de quantités proportionnelles aux temps.

Le mouvement est uniformément *accéléré* ou *retardé* selon que la vitesse augmente ou diminue. On peut donc écrire

$$(1) \qquad V = V_0 \pm at = \frac{ds}{dt},$$

V_0 étant la *vitesse initiale* ou qui se rapporte au premier instant, a une constante positive qui a reçu le nom d'*accélération,* mais *dans le sens du mouvement,* pour un motif que l'on fera connaître plus tard.

En supposant que l'origine du chemin corresponde à celle du temps, l'équation précédente donne

$$(2) \qquad s = V_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

On peut écrire

$$s = \left(\frac{V_0 \pm at}{2} + \frac{V_0}{2}\right) t = \frac{V + V_0}{2} t,$$

ce qui exprime que *le chemin parcouru dans un temps quelconque est le même que si le mobile eût été animé d'une vitesse constante égale à la demi-somme des vitesses initiale et finale.*

Si la vitesse initiale est nulle ou si le mobile part du repos, on a

$$V = at, \qquad s = \frac{at^2}{2},$$

et la vitesse est proportionnelle au temps, et le chemin est proportionnel au carré du temps.

8. *Chute verticale des corps pesants dans le vide.* — La chute d'un corps pesant dans le vide offre, pour chacun des points qui le constituent, un exemple du mouvement uniformément accéléré.

On a trouvé, à Paris, pour la valeur de l'accélération de la gravité, qu'on désigne par la lettre g,

$$g = 9^{m},8088.$$

Si donc un corps tombe dans le vide sans vitesse initiale, sa vitesse au bout du temps t est

$$(3) \qquad V = gt,$$

et la hauteur h qu'il aura parcourue

$$(4) \qquad h = \frac{gt^2}{2},$$

d'où, par l'élimination de t entre les deux équations,

$$V = \sqrt{2gh},$$

ce qui fait dire que $\sqrt{2gh}$ est *la vitesse due à la hauteur h.*

Au bout du temps $t+1$, la hauteur de la chute est

$$h_1 = \tfrac{1}{2}g(2t+1)^2,$$

d'où, en retranchant de l'équation (4),

$$h_1 - h = \tfrac{1}{2}g(2t+1).$$

Donc : *les chemins parcourus dans les unités successives du temps, à partir du premier instant, sont entre eux comme les nombres impairs successifs.*

9. *Chutes successives de deux points pesants.* — Pour un point partant de la position initiale m_0, le chemin parcouru au bout du temps t sera

$$\overline{m_0 m} = \frac{gt^2}{2} = h.$$

En admettant qu'au bout du temps θ on laisse tomber un autre point de la position m_0, on aura pour le chemin qu'il aura parcouru à l'instant t,

$$\overline{m_0 m_1} = \frac{g}{2}(t-\theta)^2 = h_1,$$

d'où

$$h - h_1 = \frac{g}{2}(2t\theta - \theta^2).$$

Soit $\varepsilon = \dfrac{g\theta^2}{2}$ le chemin parcouru par le premier point lorsque le second est abandonné à lui-même; en éliminant θ entre cette équation et la précédente, on obtient

$$h - h_1 = 2\sqrt{h\varepsilon} - \varepsilon.$$

Désignons maintenant par H la hauteur totale de chute du premier point, et par ζ l'écart correspondant des deux points, nous avons

$$\zeta = 2\sqrt{H\varepsilon} - \varepsilon.$$

Soit $H = 300^m$ (chute de Staubach); en admettant

$$\varepsilon = 0^m,000001,$$

on trouve $\zeta = 0^m,0346$, écart considérable qui explique pour-

quoi au pied du Staubach, où l'eau est déjà divisée au sommet par de petites chutes et écueils antérieurs, on ne reçoit que de l'eau en poussière.

10. *Ascension d'un point pesant dans le vide.* — Considérons le mouvement d'un point pesant lancé de bas en haut dans le vide avec la vitesse initiale V_0. L'expérience prouve qu'on peut ici appliquer les formules relatives au mouvement uniformément retardé et qu'on a

$$V = V_0 - gt, \qquad h = V_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Le mobile arrivera à sa plus grande hauteur H lorsque la vitesse V sera nulle, à l'instant $t = \frac{V_0}{g}$, ce qui donne

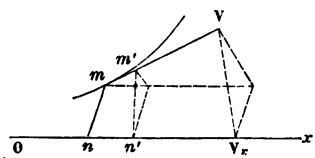
$$H = \frac{V_0^2}{2g}.$$

C'est pourquoi on dit que $\frac{V_0^2}{2g}$ est *la hauteur due à la vitesse* V_0; à partir de cet instant, le mobile tombera d'un mouvement uniformément accéléré, et il est facile de voir que la vitesse au bas de la chute est précisément égale et contraire à la vitesse initiale V_0.

11. *Projection d'une vitesse sur une droite.* — On représente la vitesse d'un point par une longueur proportionnelle à cette vitesse portée, dans le sens du mouvement, sur la tangente à la trajectoire à partir du point de contact; on comprend dès lors ce que l'on doit entendre par la *projection orthogonale* ou *oblique* de la vitesse sur une droite.

Soient (*fig.* 1)

Fig. 1.



m la position du mobile à l'instant t;
mm' l'élément de chemin;

n, n' les projections de m, m' sur un axe Ox par des plans parallèles à un plan déterminé;

$V = \overline{mV}$ la vitesse en m;

$V_x = \overline{nV_x}$ sa projection sur Ox.

On voit sur la figure que

$$\frac{\overline{mm'}}{\overline{mV}} = \frac{\overline{nn'}}{\overline{nV_x}},$$

ou

$$nn' = \frac{V_x}{V} mm' = \frac{V_x}{V} V\,dt = V_x\,dt,$$

d'où

$$\frac{nn'}{dt} = V_x,$$

ce qui exprime que *la projection de la vitesse d'un point est la vitesse de la projection du mobile sur l'axe.*

La projection orthogonale d'une vitesse sur un axe est ce qu'on nomme la *vitesse du mobile estimée suivant cet axe.*

Si l'on rapporte le mouvement du point à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, on a

$$V_x = V\cos(V, x), \qquad V_y = V\cos(V, y), \qquad V_z = V\cos(V, z),$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

La vitesse d'un point est donc complètement déterminée quand on connaît les vitesses des projections du point sur les trois axes.

Considérons en particulier le mouvement circulaire d'un point. Soient r le rayon de la circonférence; Ox, Oy deux rayons rectangulaires fixes; θ l'angle formé par le rayon mobile avec Ox; $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire. Nous avons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$V_x = -\omega y, \qquad V_y = \omega x.$$

12. *Projection d'une vitesse sur un plan faite parallèlement à une direction donnée.* — Par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent, on reconnaît sans peine que *la projection de la vitesse du point est la vitesse de la projection de ce point.*

13. *Des mouvements simultanés.* — Nous allons faire comprendre, comme exemple, comment un point peut être considéré comme animé de plusieurs mouvements distincts.

Concevons une bille qui se meut sur un bateau entraîné lui-même par un cours d'eau. Le centre de la bille possède à la fois : 1° le mouvement dont il est animé par rapport au bateau; 2° le mouvement du bateau par rapport aux rives; 3° le mouvement que celles-ci possèdent en commun avec la Terre autour de son axe et autour du Soleil; 4° enfin le mouvement problématique du système solaire dans l'espace.

De tels mouvements sont dits *relatifs* ou encore *indépendants,* parce que chacun d'eux a lieu comme si les autres n'existaient pas.

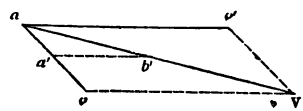
Le mouvement réel ou *absolu* est appelé *mouvement résultant* des *mouvements simultanés relatifs.* Ces derniers portent le nom de *mouvements composants.*

La vitesse du mouvement résultant est la *résultante* des vitesses des autres mouvements considérés et celles-ci sont les *composantes.*

14. *Composition de deux vitesses simultanées.* — Supposons que, nous trouvant entraîné dans le mouvement d'un système invariable (S), nous observions un point m.

Soient (*fig.* 2) a le point de (S) où se trouve m à l'in-

Fig. 2.



stant t; a' la position que prend ce point de (S) à l'instant $t+dt$; $v=\frac{aa'}{dt}$ la vitesse (dite *d'entraînement*) de a; au

second instant, m occupera un point b' de l'espace et aura décrit pour l'observateur l'élément $a'b'$ avec la *vitesse relative* $v' = \frac{\overline{a'b'}}{dt}$. La vitesse absolue V étant $\frac{\overline{ab'}}{dt}$, on voit que *cette résultante* $\overline{aV} = V$ est *la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses composantes* $\overline{av} = v$, $\overline{av'} = v'$.

En projection sur trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz on a

$$V_x = v_x + v'_x, \qquad V_y = v_y + v'_y, \qquad V_z = v_z + v'_z.$$

Réciproquement ces trois relations conduisent au parallélogramme.

L'analyse conduit facilement à ces résultats; en effet, la position de (S), par rapport à Ox, Oy, Oz peut être définie à chaque instant par celle du système de trois axes rectangulaires $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ fixes dans (S). Soient, à l'instant t,

x, y, z	les coordonnées de	m	parallèles à	Ox, Oy, Oz;
χ, η, ζ	»	O'	»	»
x', y', z'	»	m	»	$O'x'$, $O'y'$, $O'z'$.

On a

$$x = \chi + x'\cos(x', x) + y'\cos(y', x) + z'\cos(z', x),$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{d\chi}{dt} + x'\frac{d\cos(x', x)}{dt} + y'\frac{d\cos(y', x)}{dt} + z'\frac{d\cos(z', x)}{dt}\right]$$
$$+ \left[\cos(x', x)\frac{dx'}{dt} + \cos(y', x)\frac{dy'}{dt} + \cos(z', x)\frac{dz'}{dt}\right].$$

En supposant x', y', z' constants, $\frac{d\chi}{dt}$ est la valeur de v_x; d'ailleurs le second groupe de termes n'est autre chose que v'_x; donc $V_x = v_x + v'_x$, ce qu'il fallait établir.

Il résulte de ce qui précède qu'une vitesse V peut être remplacée par deux vitesses simultanées v, v' de directions données, comprises dans un même plan avec V, et dont les valeurs se déterminent en construisant le parallélogramme dont V est la diagonale et dont les côtés sont parallèles à v, v'.

15. *Composition de trois vitesses simultanées.* — Supposons que (S) se déplace par rapport à un autre système invariable (S′) et soit v'' la vitesse du point d'entraînement de (S′).

La vitesse relative V_1 de m par rapport à (S′) est la résultante de v, v'; la vitesse absolue V sera celle de V_1 et v''. Il suit de là que :

1° *La vitesse résultante est la diagonale du parallélépipède construit sur les trois vitesses composantes;*

2° *Une vitesse* V *peut se décomposer et d'une seule manière en trois autres de directions données non comprises dans un même plan avec* V.

16. *Composition d'un nombre quelconque de vitesses simultanées.* — Soient

$\overline{av_1}$, $\overline{av_2}$, ..., $\overline{av_n}$ les droites issues d'un point a qui représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes v_1, v_2, ..., v_n;

$\overline{aV_2} = V_2$ la résultante de v_1, v_2;

$\overline{aV_3} = V_3$ » V_2, v_3;

.....,

$\overline{aV_n} = V_n$ » V_{n-1}, v_n.

La vitesse résultante sera V_n et sera ainsi le dernier côté du polygone $av_1v_2\ldots v_n$, dont les côtés sont égaux et parallèles aux vitesses composantes.

On a, en projection sur trois axes rectangulaires fixes, et supprimant l'indice de V_n devenu inutile,

$$V_x = \Sigma v_x, \quad V_y = \Sigma v_y, \quad V_z = \Sigma v_z, \quad V = \sqrt{(\Sigma v_x)^2 + (\Sigma v_y)^2 + (\Sigma v_z)^2}.$$

Il suit de là que, quel que soit l'ordre dans lequel on compose les vitesses, on arrive au même résultat, ce qui devait être.

Dans le cas où les vitesses composantes sont parallèles, leur résultante est égale à leur somme algébrique, en considérant comme positives celles qui ont un certain sens, et comme négatives celles qui ont le sens contraire.

En considérant les projections des vitesses et de leur polygone sur un plan on voit immédiatement que *la projection*

de la résultante est la résultante des projections des vitesses composantes.

17. *Des sommes et des différences géométriques.* — Si, pour exprimer que la vitesse V est le dernier côté du polygone formé par les lignes qui représentent les vitesses composantes v, v', v'', ..., nous nous servons de la notation symbolique

$$(a) \qquad \overline{V} = \overline{v} + \overline{v'} + \ldots,$$

nous dirons que V est la *somme géométrique des longueurs* v, v', ...; nous avons évidemment la relation

$$(b) \qquad \overline{V} + \overline{u} = \overline{v} + \overline{v'} + \ldots + \overline{u},$$

puisqu'elle exprime que la résultante de v, v', ..., et de u est la même que celle de V et u.

En posant $\overline{w} = \overline{v'} + \overline{v''} + \ldots$, nous avons

$$\overline{V} = \overline{v} + \overline{w}.$$

Mais v changé de sens ou de signe et V auront pour résultante w. Nous pourrons donc écrire symboliquement

$$(c) \qquad \overline{V} - \overline{v} = \overline{w} = \overline{v'} + \overline{v''} + \ldots,$$

et $\overline{V} - \overline{v}$ est une *différence géométrique.*

Les formules symboliques telles que (a), (b), (c) ont reçu le nom d'*équations géométriques linéaires.*

Soit

$$(a_1) \qquad \overline{V_1} = \overline{v_1} + \overline{v'_1} + \ldots$$

une seconde somme géométrique mise en parallèle avec (a). On a identiquement

$$\overline{V} + \overline{V_1} = \overline{v} + \overline{v'} + \ldots + \overline{v_1} + \overline{v'_1} + \ldots,$$

puisque cette équation exprime que la résultante de v, v', ..., v_1, v'_1, ... est celle de V et V_1.

En ajoutant géométriquement (a) à (a_1) changé de signe, on obtient

$$\overline{V} - \overline{V_1} = \overline{v} + \overline{v'} + \ldots - \overline{v_1} - \overline{v'_1} - \ldots.$$

Il résulte de là que, géométriquement, les équations géométriques linéaires se comportent comme les équations linéaires algébriques au point de vue algébrique.

18. *Des produits géométriques.* — Nous appellerons *produit géométrique* de deux longueurs a et b leur produit par le cosinus de leur angle et dont il portera le signe.

Si, pour représenter le produit géométrique de a, b, on emploie la notation symbolique $\bar{a} \times \bar{b}$, il est clair que l'on a $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{a}$, d'où résulte que dans un produit géométrique on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Supposons que a soit une somme géométrique,

$$\bar{a} = \bar{c} + \bar{c}' + \ldots,$$

on a

$$a \cos(a, b) = c \cos(c, b) + c' \cos(c', b) + \ldots$$

et, en multipliant par b,

$$ab \cos(a, b) = cb \cos(c, b) + c'b \cos(c', b) + \ldots,$$

ou

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{c}\bar{b} + \bar{c}'\bar{b} + \ldots.$$

Il suit de là que : *le produit géométrique d'une longueur par une somme géométrique est égal à la somme algébrique des produits géométriques de cette ligne par les éléments de la somme géométrique.*

Soit

$$\bar{b} = \bar{d} + \bar{d}' + \ldots;$$

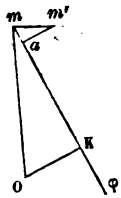
on a, eu égard à ce qui précède,

$$\begin{aligned}\bar{a}\bar{b} &= \bar{c}(\bar{d} + \bar{d}' + \ldots) + \bar{c}'(\bar{d} + \bar{d}' + \ldots) + \ldots \\ &= \bar{c}\bar{d} + \bar{c}\bar{d}' + \ldots + \bar{c}'\bar{d} + \bar{c}'\bar{d}' + \ldots;\end{aligned}$$

donc, *le produit géométrique de deux sommes géométriques est la somme algébrique des produits semblables des éléments de l'une des sommes par chacun des éléments de l'autre.*

19. *Des moments.* — Soient (*fig.* 3)

Fig. 3.



$\overline{m\varphi}$ la droite que représente une longueur φ;

$\overline{mm'}$ un déplacement élémentaire hypothétique d'un point m de cette droite, résultant d'une rotation autour d'un point O;

$\overline{ma}$, $\overline{mK}$ les projections de mm', mO sur $\overline{m\varphi}$;

$d\theta$ le déplacement angulaire élémentaire $m\widehat{Om'}$.

On a

$$\overline{mm'} = \overline{Om}\, d\theta,$$

$$\overline{ma} = \overline{mm'}\,\frac{\overline{OK}}{\overline{Om}} = \overline{OK}\, d\theta,$$

d'où, pour le produit géométrique de φ par mm',

$$\overline{\varphi}.\overline{mm'} = \varphi \times \overline{ma} = \varphi.\overline{OK}\, d\theta.$$

Ce produit est donc le même que si le point m coïncidait avec le pied K de la perpendiculaire abaissée du point O sur la direction de φ, pour un même déplacement angulaire autour de ce point.

Le produit $\overline{\varphi} \times \overline{OK}$ est ce qu'on appelle le *moment de* φ *par rapport au centre des moments* O.

Le moment devra être considéré comme positif ou négatif, conformément aux conventions ci-dessus, selon que le point K se déplacera dans le sens de φ ou en sens inverse, ou encore selon que le point K, censé se mouvoir autour de O en vertu de la vitesse φ, imprimera au rayon $\overline{OK}$ un mouvement de rotation dans le sens de $d\theta$ ou en sens inverse.

On supposera, conformément à l'usage, que le déplacement angulaire $d\theta$ a toujours lieu de la gauche vers la droite.

Il résulte de ce qui précède que :

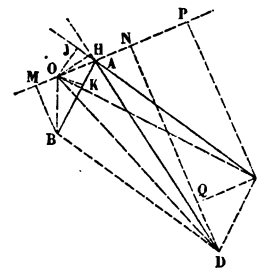
Le moment d'une somme géométrique plane par rapport à un point de son plan est égal à la somme algébrique des éléments de cette somme (théor. de Varignon) [1], puisque les produits géométriques ne diffèrent des moments que par le facteur constant $d\theta$.

20. *Composition et décomposition des moments.* — Concevons que, à partir du point O, on porte, sur la perpendicu-

---

[1] Ce théorème peut se démontrer directement comme il suit :
Soient (*fig.* 4)

Fig. 4.



AD la somme géométrique de deux droites AB, AC;
OK, OH, OJ les perpendiculaires abaissées du point O sur AB, AD, AC.

Il faut prouver que

$$AB \times OK + AC \times OJ = AD \times OH$$

ou que

$$\text{triangle } AOB + \text{triangle } AOC = \text{triangle } AOD.$$

Mais les trois triangles ont un côté commun OA; il suffit donc d'établir que la perpendiculaire DN abaissée de D sur OA est égale à la somme des perpendiculaires BM, CP abaissée sur la même droite des points B et C, ce qui devient évident en menant CQ parallèle à OA jusqu'à la rencontre de DN et remarquant que les triangles CQD, ABM sont égaux.

Le théorème, étant établi pour deux droites, s'étend facilement à une somme géométrique plane quelconque.

laire au plan qu'il détermine avec φ, une longueur L proportionnelle au moment, dans le sens pour lequel ce moment serait positif pour l'observateur couché suivant cette droite en ayant les pieds en O. Soit L′ la droite qui représente de la même manière le moment de la projection φ' de φ sur un plan, passant si l'on veut par le point O. Les longueurs L, L′ étant proportionnelles aux aires des triangles formés par le point O et les droites qui représentent φ et φ', on conclut que *la seconde est la projection de la première sur sa direction.*

Soient

L, l, l', ... les moments d'une somme géométrique et de ses éléments;

L_u, l_u, l'_u, ... leurs projections sur un axe Ou.

Si l'on projette sur les plans coordonnés, on a, d'après ce qui précède,

$$L_x = l_x + l'_x + \ldots, \qquad L_Y + l_y + l'_y + \ldots, \qquad L_z = l_z + l'_z + \ldots.$$

Donc : 1° *En projection sur un axe, la droite qui représente le moment d'une somme géométrique est la somme algébrique des droites semblables relatives aux composantes.* 2° *La droite qui représente le moment de la somme géométrique est la somme géométrique des droites semblables relatives aux composantes.*

On peut écrire géométriquement

$$\bar{L} = \Sigma \bar{l}.$$

Les moments se composent donc et par suite se décomposent comme les vitesses.

CHAPITRE II.

DES MOUVEMENTS GÉOMÉTRIQUES DES SYSTÈMES INVARIABLES.

§ I. — Mouvements de translation, de rotation et de roulement.

21. *Mouvement de translation ou translatoire.* — Dans ce mouvement, les points d'un système invariable (S) sont animés simultanément et à chaque instant de vitesses égales et parallèles.

Le mouvement est rectiligne ou curviligne.

22. *Mouvement de rotation ou gyratoire.* — Les points du système (S) décrivent simultanément autour d'un axe fixe des éléments de cercles concentriques perpendiculaires à cet axe. On reconnaît sans peine que les déplacements angulaires simultanés des plans méridiens correspondant aux divers points du système sont égaux.

Soient V la vitesse d'un point situé à la distance r de l'axe; ω la vitesse angulaire (n° 6), c'est-à-dire la vitesse d'un point de (S) situé à l'unité de distance de l'axe; on a

$$V = \omega r.$$

23. *Mouvement de glissement.* — Les mêmes éléments de la surface d'un solide se mettent successivement en contact avec les éléments distincts et consécutifs de la surface d'un autre solide.

24. *Mouvement de roulement.* — Les éléments consécutifs de la surface d'un solide (S) viennent se mettre successivement en contact avec les éléments consécutifs de la surface d'un

autre solide (S′). Considérons en particulier deux cylindres roulant l'un sur l'autre dont l'un (S′) est censé fixe; la question se ramène au roulement de leurs sections droites l'une sur l'autre. Or, en considérant ces courbes comme des polygones infinitésimaux ayant actuellement un côté commun ab, les côtés consécutifs bc, cd, ... de la courbe mobile doivent venir successivement coïncider avec les éléments respectivement égaux bc', $c'd'$, ... de la courbe fixe, et pour que bc vienne coïncider avec bc' il faut qu'il y ait rotation de la figure mobile autour du point b supposé fixe.

Il suit de là que : 1° une courbe qui roule sur une autre peut à chaque instant être considérée comme tournant pendant un temps infiniment petit autour du point de contact supposé fixe à cet instant et qui, par ce motif, a reçu le nom de *centre instantané de rotation;* 2° *la normale à la courbe décrite par un point quelconque de la figure mobile passe par ce centre.*

Soient ω la vitesse angulaire autour du point b; ds l'élément abc; $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ les angles de contingence et R, R′ les rayons de courbure des courbes abc, ..., $a'b'c'$, ...; on a, selon que ces courbes opposent ou non leurs convexités,

$$\widehat{cbc'} = d\varepsilon' \pm d\varepsilon,$$

et, comme cet angle est égal à $\omega\, dt$, on a

$$\omega\, dt = d\varepsilon' \pm d\varepsilon = \left(\frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R}\right) ds.$$

On peut supprimer le double signe de $\frac{1}{R}$ en convenant de considérer R comme positif ou négatif selon que (S) sera extérieur ou intérieur à (S′).

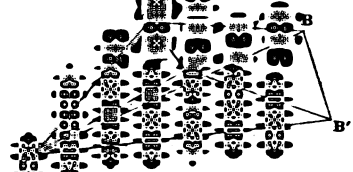
Nous étudierons plus loin le roulement de deux surfaces quelconques l'une sur l'autre.

On remarquera que, lorsqu'un cercle roule sur une droite, tout déplacement de son centre est égal au déplacement relatif de la circonférence par rapport à ce centre.

[illegible] ble parallèle à un plan.

[illegible] d'un axe fixe n'est [illegible] ui où tous les points [illegible] de vitesses parallèles [illegible] sur le plan, revient à [illegible] plan.

[illegible] ure peut être définie [illegible] joint deux points de [illegible]



[illegible] au bout du temps dt, [illegible] ux éléments AA', BB', [illegible] comme ceux de deux [illegible] point O. On a alors [illegible] OB, A'OB' sont par [illegible] ux angles égaux $\widehat{AOB}$, [illegible]

[illegible] tant le temps dt autour [illegible] appelé pour ce motif [illegible] sse angulaire autour [illegible] m de la figure est mO. [illegible] à décrire deux lignes [illegible] ale mO, seront déter- [illegible]

[illegible] ours assujetti à décrire

une ligne donnée, la seconde condition du mouvement soit qu'une autre ligne donnée tracée dans le plan de la figure soit assujettie à passer par un point fixe K. Le centre instantané O se trouvera sur la normale en K à la seconde ligne.

Si une des conditions du mouvement est qu'une droite tracée dans le plan de la figure reste tangente à une ligne fixe donnée, le centre instantané se trouvera sur la normale au point de contact.

Revenons aux généralités; soient

O le centre instantané à un instant donné;
O_1, O_2, O_3, ... les positions successives des centres instantanés sur le plan fixe;
O'_1, O'_2, O'_3, ... les positions correspondantes des mêmes points sur le plan de la figure mobile.

Au bout du temps dt, le point O'_1 viendra en O_1; mais, comme ce déplacement ne peut s'effectuer qu'autour du centre instantané O, il s'ensuit que la courbe $OO'_1O'_2$... roule sur la courbe fixe; en d'autres termes, *le mouvement le plus général d'une figure plane invariable dans son plan se réduit au roulement d'une ligne sur une autre.*

Le mouvement du système invariable (S) dans l'espace résultera du roulement d'un cylindre sur un cylindre fixe et la génératrice de contact sera l'*axe instantané* de (S).

§ III. — Du mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.

26. La position du système (S) mobile autour du point O sera définie à chaque instant t par celles de deux quelconques de ses points A, B. Soient

not in line with O

$A'B'$ la position que prend la droite AB à l'instant $t + dt$;
(P) le plan mené par les parallèles en O aux vitesses $\frac{AA'}{dt}$, $\frac{BB'}{dt}$;
$ab = a'b'$ les projections de AB, $A'B'$ sur (P).

Le centre instantané de ab se trouvera nécessairement en

O et (S) tournera pendant le temps dt autour de l'axe *instantané* Ox, perpendiculaire à (P) avec une certaine vitesse angulaire ω.

Le cône, lieu des axes instantanés successifs dans (S), roulera sur le cône lieu de ces axes dans l'espace.

§ IV. — Composition des translations et des rotations.

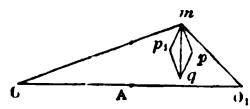
27. *Composition des translations.* — Il est clair que, si un solide est animé de plusieurs translations simultanées, la vitesse dans la translation résultante est la résultante des vitesses composantes.

28. *Des rotations autour d'axes parallèles.* — Un système invariable (S) tourne autour d'un axe $O_n x_n$, ce dernier autour d'un autre axe $O_{n-1} x_{n-1}$, et ainsi de suite jusqu'à Ox qui est absolument fixe. Il s'agit de déterminer le mouvement résultant. On est évidemment ramené à considérer une section de (S) perpendiculaire à la direction des axes, c'est-à-dire une figure plane animée des rotations ω_n, $\omega_{n-1}, \ldots, \omega$ autour des centres O_n, $O_{n-1}, \ldots, O$.

29. *Composition de deux rotations.*

1° *De même sens.* — Soit (*fig.* 6) A un point de la figure (S) situé entre O et O_1. Ce point est animé de deux vitesses

Fig. 6.



de sens contraire et, si elles sont égales, le point A restera fixe pendant le temps dt ou sera le centre instantané de rotation; alors on aura

$$(1) \qquad \omega \times OA = \omega_1 \times O_1A, \qquad \frac{\omega + \omega_1}{\omega} = \frac{OO_1}{O_1A},$$

d'où

$$O_1A = \frac{\omega \times OO_1}{\omega + \omega_1}. \tag{2}$$

Soit Ω la rotation instantanée de (S) autour de A; on a, en égalant deux expressions de la vitesse de O_1,

$$\Omega \times O_1A = \omega \times OO_1,$$

par suite, vu (2),

$$\Omega = \omega + \omega_1$$

et enfin

$$\Omega : \omega : \omega_1 :: OO_1 : O_1A : OA.$$

Donc : *Les deux rotations se composent en une seule égale à leur somme et dont le centre divise la distance des centres des deux autres, en raison inverse de leurs valeurs.*

2° *De sens contraire.* — Soit $\omega_1 > \omega$.

Pour que le point A de (S) situé sur le prolongement de OO_1 au delà de O_1 ait une vitesse nulle, il faut que

$$\omega \times OA = \omega_1 \times O_1A_1, \tag{3}$$

d'où

$$OA = \frac{\omega_1 \times OO_1}{\omega_1 - \omega}. \tag{4}$$

En désignant par Ω la rotation instantanée autour de A, on a

$$\Omega \times OA = \omega_1 \times OO_1,$$

d'où, vu (4),

$$\Omega = \omega_1 - \omega.$$

Donc, etc.

On voit, par ce qui précède, qu'une rotation Ω autour d'un point A peut se décomposer en deux autres autour de deux points donnés O, O_1 en ligne droite avec A.

3° *Couple de rotations.* — Si les rotations ω, ω_1 sont égales et de sens contraire, on a $OA = \infty$, $\Omega = 0$, ce qui n'a aucune signification. Il y a donc lieu de s'arrêter à ce cas singulier.

Soient (*fig.* 6)

m un point quelconque de la figure (S);

$mp = \omega \times Om$, $mp_1 = \omega \times O_1 m$ les vitesses de m autour de O, O_1;
mq la vitesse résultante.

Les triangles OmO_1, mpq étant semblables, on voit que mq est perpendiculaire à OO_1 et égal à $\omega \times OO_1 = \text{const.}$ Donc (S) *est animé d'une translation perpendiculaire à* OO_1.

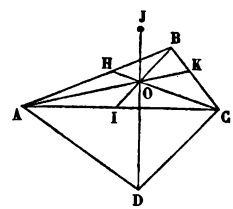
30. *Composition d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes parallèles.*

1° *Les rotations sont toutes de même sens.* — Les rotations ω, ω_1 donneront $\Omega = \omega + \omega_1$ autour de A; les rotations ω et ω_2 donneront $\Omega_1 = \Omega + \omega_2 = \omega + \omega_1 + \omega_2$ autour de A_1 et ainsi de suite. On arrivera ainsi à la rotation finale $\Sigma\omega$.

2° *Les rotations sont de sens différents.* — Soient $\Omega > \Omega'$ les résultantes des rotations de l'un et l'autre sens. La résultante finale sera $\Omega - \Omega'$. Si $\Omega = \Omega'$, on aura un couple de rotation.

31. On ne peut décomposer que d'une seule manière une rotation ω en trois autres autour d'axes parallèles au sien. Soient, en effet (*fig.* 7), A, B, C les traces de ces trois axes

Fig. 7.



sur un plan perpendiculaire à leur direction; O la trace de l'axe de la rotation donnée ω. Nous supposerons par exemple que le point O se trouve dans l'intérieur du triangle ABC. Soient K, I, H les intersections des directions de AO, BO, CO avec celles de BC, AC, AB. Décomposons la rotation ω en deux autres : l'une $\omega_1 = \omega \frac{\overline{OI}}{\overline{BI}}$ autour de B, l'autre $\omega \frac{\overline{OB}}{\overline{BI}}$

autour de I, et cette dernière en deux autres

$$\omega_2 = \omega \frac{\overline{OB}}{\overline{BI}} \times \frac{\overline{CI}}{\overline{AC}}, \qquad \omega_3 = \omega \frac{\overline{OB}}{\overline{BI}} \times \frac{\overline{AI}}{\overline{AC}}$$

autour de A et C. D'après une propriété connue des transversales, ces expressions se réduisent à

$$\omega_2 = \omega \frac{OK}{AK}, \qquad \omega_3 = \omega \frac{OH}{CH}.$$

Il résulte de l'analogie qu'ont entre elles les expressions de ω_1, ω_2, ω_3 que la décomposition est unique. On remarquera notamment que

$$\omega_1 : \omega :: OI : BI :: \text{triangle AOC} : ABC,$$

d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

Le problème est indéterminé si le nombre des rotations composantes dépasse trois; supposons, par exemple, qu'il y ait un quatrième centre D; décomposons la rotation ω en deux autres, l'une autour de D et l'autre ω' autour d'un point quelconque J de OD; puis décomposons la rotation ω' en trois autres autour des trois centres A, B, C. Cette dernière décomposition est unique; mais, comme la position de J sur OD est arbitraire, on peut faire varier comme on l'entend les rotations partielles.

32. *Composition d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à son axe.* — Nous continuerons à raisonner sur les projections faites sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Soit OA la perpendiculaire abaissée du centre O de la rotation donnée ω sur la direction de la translation V. Il y a sur la direction de la droite OA des points dont les vitesses respectivement dues à la rotation et à la translation sont de sens opposé et l'on peut trouver, par suite, sur cette portion un point A pour lequel la vitesse résultante sera nulle; ce point, déterminé par la relation

$$V = \omega \times OA,$$

d'où

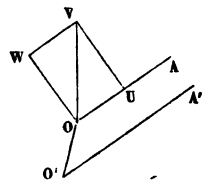
$$OA = \frac{V}{\omega},$$

est le centre instantané de rotation; la vitesse angulaire Ω autour du point A sera d'ailleurs ω puisque la vitesse de O a pour double expression V et $\Omega \times$ OA.

On remarquera qu'une rotation ω autour d'un axe xy peut être remplacée par une rotation égale autour d'une parallèle $x'y'$ et une translation égale à la vitesse de chacun des points de $x'y'$ autour de xy.

33. *Mouvement le plus général d'un système invariable.* — Concevons (*fig.* 8) qu'on imprime au système (S) une

Fig. 8.



vitesse de translation égale et contraire à celle V de l'un quelconque O de ses points ainsi ramené au repos; (S) tournera alors (voir 26.) autour d'un certain axe instantané OA avec une vitesse angulaire ω. Il résulte de là que le mouvement de (S) se compose de la rotation ω et de la translation V. Soient U et W les composantes de V dirigées respectivement suivant OA et sa perpendiculaire dans le plan VOA. La rotation ω et la translation W se composent (voir 32.) en une seule rotation ω autour de l'axe O'A' parallèle à OA, défini par la perpendiculaire $OO' = \frac{W}{\omega}$ au plan VOA.

Donc : 1° *Le mouvement le plus général de* (S) *peut être considéré comme résultant d'une translation et d'une rotation autour d'un point fixe quelconque;* 2° *la rotation est constante en grandeur et en direction quelle que soit la position du point censé fixe;* 3° *il existe une position unique de l'axe instantané pour laquelle la translation a lieu suivant sa direction, d'où ce qu'on appelle* l'axe instantané de rota-

tion et de glissement [1]. La vitesse U est dite *de glissement*.

Un point de (S) situé à la distance r de O'A' décrit dans le temps dt un élément d'hélice dont la pente sur le plan perpendiculaire à O'A' est $\tan g\, i = \frac{U}{\omega r}$; mais, si h est le pas de l'hélice, on a $\tan g\, i = \frac{h}{2\pi r}$; par suite, $h = 2\pi \frac{U}{\omega}$. Donc, dans un élément du temps, les points de (S) décrivent simultanément des éléments d'hélices de même pas.

Soient

(σ), (σ') les lieux des axes instantanés successifs dans (S) et dans l'espace;

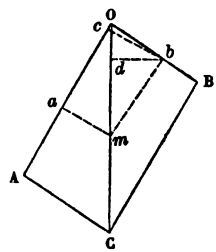
xy la génératrice de contact de (σ), (σ') à l'instant t;

$x_1 y_1$, $x'_1 y'_1$ les génératrices de ces surfaces qui doivent coïncider à l'instant $t + dt$.

Au bout de dt, (σ) se déplacera de $U\,dt$ parallèle à xy, puis tournera de $\omega\, dt$ autour de cette droite. L'aire élémentaire $(xy, x_1 y_1)$ viendra donc coïncider avec l'aire $(xy, x'_1 y'_1)$ par suite de la translation U et de la rotation instantanée ω; en d'autres termes, (σ) glissera et roulera sur (σ').

34. *Composition des rotations autour d'axes concourants.* — Considérons un corps solide animé d'une rotation ω' autour d'un axe OB (*fig.* 9) tournant lui-même autour d'une droite

Fig. 9.



OA, qui le rencontre en O, avec la vitesse angulaire ω. Les

[1] La considération de cet axe remonte à 1763 et est due au géomètre florentin Giulio Mozzi.

deux rotations sont censées avoir lieu dans le même sens, de la gauche vers la droite par exemple, pour l'observateur couché suivant OB et OA en ayant les pieds en O; chaque point m de l'angle AOB, dont ma, mb sont les distances à OA, OB, est animé des deux vitesses de sens contraire $\omega \times ma$, $\omega' \times mb$ et, si $\omega \times ma = \omega' \times mb$, ce point restera fixe. Or, d'après le théorème du n° 19, tous les points de la somme géométrique OC de $OA = \omega$, $OB = \omega'$ jouissent de cette propriété; d'où il suit que OC est l'axe instantané résultant.

Soient

Ω la rotation résultante;

bc, bd les perpendiculaires abaissées d'un point b de OB sur OA et OC.

On a, en égalant deux expressions de la vitesse du point b,

$$\Omega \times bd = \omega \times bc,$$

d'où il suit que Ω est représenté par la diagonale OC.

Ainsi deux rotations simultanées et, en général, un nombre quelconque de rotations simultanées concourantes se composent comme les vitesses.

On pourra aussi considérer une rotation comme la résultante de plusieurs autres qu'on déterminera en suivant la marche que nous avons indiquée pour la décomposition des vitesses.

35. *Composition des rotations autour d'axes ayant des directions quelconques.* — Soient ω, ω', ω'', ... les vitesses angulaires simultanées d'un système invariable autour d'axes A, A', A'', ..., dont les directions sont quelconques; chaque rotation peut être considérée comme résultant d'une même rotation autour d'un axe parallèle passant par un point O du système choisi arbitrairement et d'une translation perpendiculaire au plan des deux axes dont la grandeur et la direction sont déterminées. On est alors ramené à composer les rotations autour d'axes concourants et des translations. Le mouvement se réduit donc à une rotation unique accompagnée d'une translation. Il est alors facile, comme on l'a vu plus haut, de trouver la position de l'axe instantané de rotation et de glissement.

36. *Projections de la vitesse d'un point résultant de la rotation instantanée ω sur trois axes rectangulaires.* — On placera l'origine en un point de l'axe instantané de rotation et de glissement.

Soient n, p, q les composantes de ω suivant Ox, Oy, Oz, dont le sens positif est de la gauche vers la droite pour l'observateur couché successivement suivant ces trois axes en ayant les pieds en O.

On reconnaît facilement que la rotation q donne pour le point (x, y, z) les composantes de la vitesse $-qy$ suivant Ox, qx suivant Oy; que n donne les composantes ny, $-nz$ suivant Oz et Oy, et enfin que p donne les composantes $-px$, pz suivant Oz et Ox.

Les composantes de la vitesse du point (x, y, z) sont donc

$$\begin{array}{ll} pz - qz & \text{suivant } Ox, \\ qx - nz & \quad\;\; Oy, \\ ny - px & \quad\;\; Oz. \end{array}$$

§ V. — Du roulement, l'une sur l'autre, des surfaces de deux solides, quelles que soient leurs formes.

37. *Digression sur quelques points de la théorie des surfaces* [1]. — En représentant par $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface, on rappellera les notations connues

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et en désignant par l, m, n les angles formés avec Ox, Oy, Oz, par la normale au point (x, y, z), on aura

$$\cos l = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos m = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos n = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

---

[1] *Voir*, d'autre part, notre *Exposition de la théorie des surfaces.*

[illegible] TRE II.

[illegible] ns de la normale pour [illegible]

[illegible] que nous désignerons [illegible] et à la normale Oz, [illegible] des dérivées partielles [illegible]

[illegible] ment voisins de O, on [illegible] ment petits du second [illegible]

$$z = [illegible] t_0 y^2),$$

$\cos l = -p(1+p^2+q^2)$
$= -p(1-\frac{1}{2}p^2+$
$= -p$

[illegible] gnera par M,

$$[illegible]$$

$$[illegible] + t_0 y)^2.$$

$\cos^2 n = 1 - \cos^2 l - \cos^2 m$
$\therefore \sin^2 n = \cos^2 l + \cos^2 m$

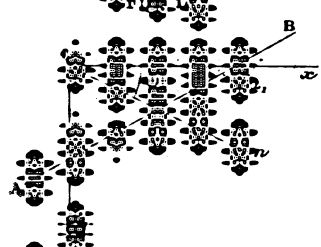
[illegible] données courantes du [illegible] on de ce plan,

$$[illegible] + t_0 y) + Z - z = 0,$$

[illegible]

$$[illegible] \frac{s_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2}{2}.$$

[illegible] on de l'intersection AB [illegible]



[illegible] y,

$$[illegible] \frac{s_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2}{2}.$$

Soient

n la projection du point M sur le plan xOy;
α, α_1 les angles de On, AB avec Ox;
I l'intersection des droites AB, On.

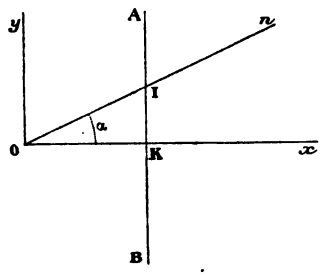
En faisant $X = \frac{x}{y} Y$ dans l'équation (a) on obtient $\cancel{X} = \frac{y}{2}$, y $X = \frac{x}{2}$ pour les coordonnées du point I qui se trouve ainsi au milieu de On. L'équation (a) donne d'ailleurs, en remarquant que $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha$,

$$(a') \qquad \operatorname{tang}\alpha_1 = -\frac{r_0 + s_0 \operatorname{tang}\alpha}{s_0 + t_0 \operatorname{tang}\alpha}.$$

En prenant pour Ox la trace d'un plan principal de courbure, (i.e. referring the indicatrix to axes) on a $s_0 = 0$ et $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha_1 = -\frac{r_0}{t_0}$, et, par suite (théor. de Dupin), AB est la direction conjuguée de On dans l'indicatrice.

Admettons maintenant qu'on se donne la position de la droite AB parallèlement à laquelle (*fig.* 11) nous dirigerons

Fig. 11.



l'axe Oy. Le terme en Y devant disparaître dans l'équation (a), nous avons

$$(b) \qquad \frac{y}{x} = -\frac{s_0}{t_0} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Si nous désignons par $d\sigma$ la distance OK de O à AB, et si

dans l'expression (2) de n^2 nous faisons

$$x = 2\,d\sigma, \qquad y = -\frac{s_0}{t_0}x = -2\frac{s_0}{t_0}\,d\sigma,$$

nous obtenons

$$n = 2\left(r_0 - \frac{s_0^2}{t_0}\right)d\sigma.$$

Soit Γ le rayon de courbure de la section normale faite suivant On; nous avons, eu regard à la valeur (b) de tang α,
(see Resal, Théorie des surfaces 1892, p. 6 (1))

$$\frac{1}{\Gamma} = \cos^2\alpha\,(r_0 + 2s_0 \operatorname{tang}\alpha + t_0 \operatorname{tang}^2\alpha) = \cos^2\alpha\left(r_0 - \frac{s_0^2}{t_0}\right);$$

par suite,

$$n = \frac{2\,d\sigma}{\Gamma\cos^2\alpha}, \tag{3}$$

formule qui est postérieure à la théorie du roulement que nous avons donnée au Tome VII, théorie à laquelle nous substituerons, avec avantage, celle qui suit.

NN. 297–301

38. *Roulement d'une surface sur un plan.* — Le point de contact O d'une surface (S) et d'un plan tangent xOy peut être considéré comme un point intérieur au périmètre, de forme indéterminée, d'une aire plane A. Supposons que (S) soit animé d'une rotation ω' autour de la normale Oz; un élément de A situé à la distance r de O glissera de $\omega' r\,dt$ sur xOy dans le temps dt, et si, pour le périmètre de A, r reste infiniment petit, ce glissement sera du second ordre et négligeable. Dans le cas où (S) est développable et où ses limites déterminent des longueurs finies de ses génératrices, $\omega' r\,dt$ sera du premier ordre à une distance finie de O et la surface glissera effectivement sur le plan xOy et alors il faut que ω' soit nul pour qu'il y ait uniquement roulement.

Soient

M un point de (S) infiniment voisin de O;
n sa projection sur le plan xOy;
AB l'intersection avec ce plan du plan tangent en M;
I l'intersection des droites AB, On.

Pour qu'un élément superficiel en m vienne coïncider sans glissement avec xOy, il faut que (S) soit animé d'une rotation ω autour de AB, et, en conservant les notations qui précèdent, on devra faire $n = \omega\, dt$ dans la formule (3) qui devient

$$\omega\, dt = \frac{2\, d\sigma}{\Gamma \cos^2 \alpha}.$$

Le point M aura éprouvé le déplacement du second ordre et négligeable

$$\sqrt{\left(\omega' \frac{2\, d\sigma}{\cos\alpha}\right)^2 + (\omega\, d\sigma)^2} = d\sigma\, dt \sqrt{\frac{4\,\omega'^2}{\cos^2\alpha} + \omega^2}.$$

Ainsi, quoi qu'il en soit, on peut toujours faire abstraction de ω'.

Dans le cas où la surface est développable, on a, en désignant par R le rayon de courbure de la section principale faite suivant Ox,

$$\omega\, dt = \frac{2\, d\sigma}{R}.$$

Supposons maintenant que, (S) étant à courbures opposées, Oy soit tangent à une ligne asymptotique; on a $t_0 = 0$ et l'équation (a) doit être vérifiée par $X = d\sigma$ quel que soit Y, ce qui exige que

$$s_0 x = 0, \qquad d\sigma(r_0 x + s_0 y) = \frac{(r_0 x + 2 s_0 y) x}{2},$$

ou que $x = 0$, $d\sigma = 0$; et, en faisant $n = \omega\, dt$ dans la troisième des formules (2), on obtient

$$(c) \qquad s_0 y = \omega\, dt.$$

On a d'ailleurs $z = 0$, c'est-à-dire que z est du troisième ordre. Il suit de là que le point M se trouve sur Oy, ou que la direction du roulement est celle de la ligne asymptotique.

39. *Roulement d'une surface* (S) *sur une surface fixe* (S'). — Nous accentuerons pour (S') les notations qui se rapportent à (S). Le plan tangent (AB, M) viendra d'abord coïncider avec xOy, puis avec le plan tangent (AB, M'). Comme M, M',

droites AB, AI doivent
ux indicatrices de (S),

s est une ellipse, il y a
roulement peut avoir
s hyperboles, le roule-
manière à la condition
e soit compris dans un
les surfaces s'emboî-
ur une étendue infini-
ossible.
rivant OI de (S), (S′)
on aura

);

impossible si $\Gamma' = \Gamma$.
oit une tangente com-
(S), (S′); le roulement
our que M vienne coïn-
ors on aura, d'après la

.

allèles de deux surfaces
e conjugué commun à
de deux cônes.
surfaces développables
rs génératrices de con-
ussement roulent l'une
t, elles coïncident.

glissement. — Nous ne
conique qui, comme cas
indrique.
on (C), (C′) qui ont le
le sur le second suivant
la vitesse angulaire Ω. Tra-

çons sur (C) une ligne géodésique qui, par le roulement, déterminera sur (C′) une ligne également géodésique. Menons suivant ces deux lignes les normalies (S), (S′) de (C), (C′); les géodésiques de (C), (C′) seront respectivement des asymptotiques de (S), (S′) [1].

Si i est l'angle formé par Ω avec la tangente commune aux géodésiques de (C), (C′) ou asymptotiques de (S), (S′), on aura, en se reportant à la signification donnée au n° 38 à ω, ω',

$$\omega = \Omega \cos i, \qquad \omega' = \Omega \sin i,$$

et (S) roulera sur (S′) suivant les asymptotiques.

---

[1] Puisque le plan osculateur d'une géodésique est tangent à la normalie correspondante.

[illegible] RE III.

[illegible]

[illegible]

[illegible] MENT D'UN POINT.

[illegible]

[illegible] oient

[illegible] ts t, $t + dt$;

[illegible] nts;

[illegible] parallèle à $\overline{mv}$;

[illegible] ou la *différentielle*

[illegible]

[illegible] appelle l'*accélération*

[illegible] ométrique $\varphi = \frac{u}{dt}$ est

[illegible] *lération;* on la repré-

[illegible] si le mouvement est

[illegible]

[illegible] u et φ par $\overline{dv}$ et $\frac{\overline{dv}}{dt}$.

[illegible] cevons que par un

[illegible] ntent en grandeur et

[illegible] essivement le mobile

[illegible] nt v_0, v les vitesses

[illegible] ntées par $A v_0$, $A v$. La

[illegible] par les extrémités de

[illegible] e des accélérations

[illegible] $\varphi\, dt$; mais la corde

$\overline{v_0 v} = \bar{v} - \bar{v}_0$: donc

$$\bar{v} - \bar{v}_0 = \overline{\int_{t_0}^{t} \varphi\, dt}.$$

43. *Projection orthogonale ou oblique de l'accélération sur une droite ou un plan.* — En nous reportant au n° 41, la projection de u sur Ox est

$$u_x = v'_x - v_x,$$

d'où

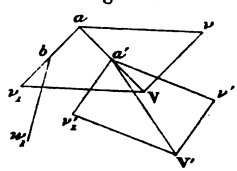
$$\varphi_x = \frac{v'_x - v_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt}.$$

Donc *la projection de l'accélération est l'accélération de* ~~*l'accélération*~~ *du mobile.*

Il est facile de reconnaître que ce théorème s'applique à la projection sur un plan.

44. *Composition des accélérations.* — Soient à l'instant t (*fig.* 12)

Fig. 12.



v la vitesse relative d'un point m par rapport à un système invariable (S);

v_1 la vitesse du point a de (S) où se trouve m (on rappellera que v_1 et a ont reçu la qualification d'*entraînement*);

$$(a) \qquad \bar{V} = \bar{v} + \bar{v}_1$$

la vitesse résultante.

Au bout du temps dt, les points m et a auront décrit les éléments de chemin $\overline{aa'} = V\,dt$, $\overline{ab} = v_1\,dt$.

au point d'entraîne-

néralement différente

$+ dt.$

nation (a) de (a'), on

ns le mouvement ré-
ans les mouvements

$+ \overline{\chi}.$

entraînement φ_e, du

célération relative φ,
d'une accélération
expression en temps

e composent comme
animé d'un nombre
s dans lesquels les
rations φ, φ_1, φ_2, ...,

on aura en même temps que $\overline{V} = \overline{v} + \overline{v_1} + \overline{v_2}, \ldots$ l'équation géométrique

$$(d) \qquad \overline{\Phi} = \overline{\varphi} + \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2} + \ldots,$$

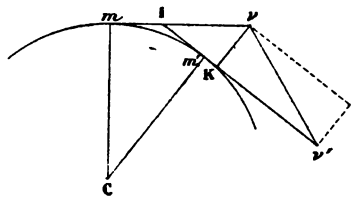
ce qui revient à

$$(d') \qquad \frac{\overline{dV}}{dt} = \frac{\overline{dv}}{dt} + \frac{\overline{dv_1}}{dt} + \ldots.$$

Le calcul conduit immédiatement à la formule (d), car de $V_x = \Sigma v_x$ on déduit $\frac{dV_x}{dt} = \Sigma \frac{dv_x}{dt}$, ce qui revient à $\Phi_x = \Sigma \varphi_x$, et de même $\Phi_y = \Sigma \varphi_y$, $\Phi_z = \Sigma \varphi_z$.

45. *Composantes tangentielle et normale de l'accélération.* — Soient (*fig.* 13)

Fig. 13.



m, m' les positions du point mobile aux instants t, $t + dt$;
I l'intersection des tangentes en m, m' à la trajectoire;
C le centre de courbure de cette ligne en m;
$v = \overline{Iv}$, $v' = \overline{Iv'}$ les vitesses en m, m';
$\overline{vv'} = \varphi\, dt$ l'accélération élémentaire;
ds l'élément de chemin mm';
$d\varepsilon$ l'angle de contingence $\widehat{vIv'}$;
$\rho = \frac{ds}{d\varepsilon}$ le rayon de courbure;
K la projection de l'index v sur $\overline{Iv'}$.

L'accélération élémentaire se décompose en

$$\overline{vK} = v\,d\varepsilon = v\frac{d\varepsilon}{ds}v\,dt = \frac{v^2}{\rho}dt \text{ suivant } \overline{m'C} \text{ ou } \overline{mC},$$

$$\overline{vK} = \frac{dv}{dt}dt \qquad \text{» } \overline{Iv'} \text{ ou } \overline{mv}.$$

Il suit de là que φ se compose de l'accélération *centripète* $\varphi_n = \frac{v^2}{\rho}$ et de l'accélération *tangentielle* $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$.

En désignant par ω la vitesse angulaire instantanée de m autour de C, on peut encore écrire $\varphi_n = \omega^2 \rho$.

Si v est constant, φ se réduit à $\varphi_n = \omega^2 \rho$, ce qui est notamment applicable au mouvement circulaire uniforme (1).

Dans le cas où le moment est rectiligne, on a $\varphi = \frac{dv}{dt}$, ce qui s'applique notamment à la projection du mobile sur un axe fixe.

46. *Expression, due à Huygens, de l'accélération.* — En désignant par β (*fig.* 14) l'angle formé par φ avec la normale principale, on a $\varphi_n = \frac{v^2}{\rho} = \varphi \cos\beta$, d'où

$$\varphi = \frac{v^2}{c},$$

---

(1) APPLICATIONS : *Projections du mouvement circulaire uniforme sur :*

1° *Deux rayons rectangulaires* Cx, Cy. — Les projections de $\varphi = \omega^2 \rho$ sur ces diamètres sont $\varphi_y = -\omega^2 x$, $\varphi_y = -\omega^2 y$. Le calcul conduit d'ailleurs immédiatement à ces résultats; car, si θ désigne l'angle formé par Cm avec Cy, on a par exemple

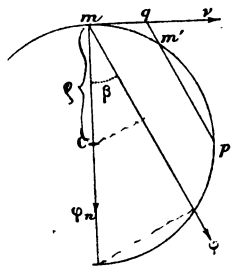
$$x = \rho \sin\theta, \quad \frac{dx}{dt} = \rho \cos\theta\, \omega = \omega y = v_x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho \sin\theta\, \omega^2 = -\omega^2 x = \varphi_x.$$

2° *Sur un plan.* — La projection n de m sur le plan décrit une ellipse dont le centre O est la projection de C; si r représente le rayon vecteur On, l'accélération de n, ou la projection de $\varphi = \omega^2 \rho$ sur le plan, est dirigée vers nO et a pour expression $\Psi = \omega^2 r$. Soient i l'inclinaison du cercle sur le plan de projection; T la durée de la révolution circulaire ou elliptique; on a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et pour le demi grand et le demi petit axe de l'ellipse, $a = \rho$, $b = \rho \cos i$. On peut écrire $\Psi = \frac{4\pi^2}{T^2} r$. Mais le rayon vecteur de l'ellipse, comme le rayon du cercle, décrit une aire proportionnelle au temps et, en désignant par h l'aire elliptique décrite dans l'unité de temps, on a $\pi ab = hT$, et, par l'élimination de T,

$$\Psi = \frac{4h^2 r}{a^2 b^2}.$$

expression dans laquelle c désigne la moitié de la corde interceptée sur la direction de φ par le cercle osculateur.

Fig. 14.



47. *Déviation élémentaire due à l'accélération.* — Comme, dans ce qui suit, on ne tiendra compte que des infiniment petits du second ordre, on pourra considérer un arc élémentaire comme étant égal à sa corde, puisqu'il n'en diffère que d'un terme du troisième ordre [1].

---

[1] Soient

OA un arc de courbe assez petit pour qu'on puisse en négliger la quatrième puissance;

Ox, Oy, Oz la tangente, la normale principale et la binormale en O;

x, y, z les coordonnées d'un point m de OA;

σ l'arc Om;

ρ le rayon de courbure, α, β, γ les angles avec Ox, Oy, Oz de la tangente en m;

λ, μ, ν les angles avec les axes de la normale principale.

On a (*Exposition de la théorie des surfaces*)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{d\sigma}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{d\sigma}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{d\sigma},$$

$$\cos\lambda = \rho\,\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}, \qquad \cos\mu = \rho\,\frac{d\cos\beta}{d\sigma}, \qquad \cos\nu = \rho\,\frac{d\cos\gamma}{d\sigma}.$$

Nous prendrons σ pour variable indépendante. Nous avons, pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = 90^\circ, \quad \lambda = 90^\circ = \nu, \quad \mu = \text{ou} \quad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 = \frac{1}{\rho_0};$$

Soient (*fig.* 14) q, p les intersections de la parallèle en m' à φ avec $\overline{mv}$ et le cercle osculateur. On a

$$\overline{mq} = v\,dt,^{*)} \qquad \varphi = \frac{2v^2}{\overline{m'p}}$$

et

$$\overline{mq}^2 = \overline{qm'} \times \overline{qp} = \overline{qm'} \times \overline{m'p},$$

d'où

$$\overline{m'p} = \frac{v^2\,dt^2}{\overline{qm'}},$$

$$\varphi = \frac{2\,\overline{qm'}}{dt^2},$$

d'où, pour la déviation,

$$\overline{qm'} = \varphi\,\frac{dt^2}{2}.$$

On arrive aussi à ce résultat en procédant comme il suit :

---

par suite, en s'arrêtant aux termes du troisième ordre,

$x = f(\sigma)$

$x = f(0) + \sigma f'(0) + \frac{\sigma^2}{2} f''(0) + \dots$

$f(0) = 0,\ f'(0) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_0 = 1,\ f''_0 = \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = 0;$

$f'''(0) = \left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 = \left(\frac{d^2\cos\alpha}{d\sigma^2}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2}$

(1) $$x = \sigma + \frac{1}{6}\left(\frac{d^2\cos\alpha}{d\sigma^2}\right)_0 \sigma^3,$$

(2) $$y = \frac{\sigma^2}{2\rho_0} + \frac{1}{6}\left(\frac{d^2\cos\beta}{d\sigma^2}\right)_0 \sigma^3,$$

(3) $$z = \frac{1}{6}\left(\frac{d^2\cos\gamma}{d\sigma^2}\right)\sigma^3.$$

En différentiant deux fois $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, on obtient

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{d\sigma}\right)^2$$
$$+ \cos\alpha\,\frac{d^2\cos\alpha}{d\sigma^2} + \cos\beta\,\frac{d^2\cos\beta}{d\sigma^2} + \cos\gamma\,\frac{d^2\cos\gamma}{d\sigma^2} = 0,$$

d'où

$$\left(\frac{d^2\cos\alpha}{d\sigma^2}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2},$$

et l'équation (1) devient

(1') $$x = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho_0^2}.$$

Supposons maintenant que σ représente l'arc OA et soit $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

---

*) If the acc. at m were 0, the pt would traverse $mq = v\,dt$, because qm' is $\parallel \varphi$ and $\overline{mq} + \overline{qm'} = \overline{mm'}$.

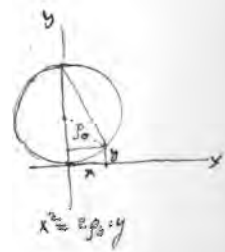
à la vitesse v'

de l'accélé-

même de qJ;

l'on voit que

par c, et alors



$m'q = \frac{qp}{2}$. Les triangles mqp, mvv' donnent

$$\overline{qp} = \overline{vv'}\,\frac{\overline{mq}}{\overline{mv}} = \varphi\, dt\,\frac{mm'}{v} = \varphi\, dt^2,$$

par suite $m'q = \varphi\,\frac{dt^2}{2}$.

Enfin l'analyse conduit rapidement au même résultat. En effet, soient Δx, Δy, Δz les accroissements de x, y, z quand t augmente de l'infiniment petit θ; on a, en s'en tenant aux termes du second ordre,

d^2x.

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\theta + \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt^2}\theta^2 = v_x\theta + \frac{1}{2}\varphi_x\theta^2, \qquad \Delta y = \ldots, \qquad \Delta z = \ldots,$$

et l'on voit que la déviation est $\frac{\varphi\theta^2}{2}$. On a aussi pour l'accroissement de l'arc

$$\Delta s = \frac{ds}{dt}\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}\theta^2 = v\theta + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\theta^2 = v\theta + \frac{1}{2}\varphi_t\theta^2.$$

Les formules précédentes s'appliquent approximativement lorsque θ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le cube.

for details see first ed. p. 55

Application au mouvement de la Lune autour de la Terre. — Le centre de la Lune décrit sensiblement un cercle et, par minute, un arc de 61020^m dont le sinus verse $4^m,87$ est sensiblement égal à $\varphi\,\frac{\theta^2}{2} = \varphi\,\frac{60^2}{2}$. Donc

$$4^m,87 = \varphi\,\frac{60^2}{2}.$$

Mais on a à peu près $4^m,87 = \frac{g}{2}$, par suite

$$\frac{\varphi}{g} = 60^2 = \frac{d^2}{R^2},$$

d étant la distance du centre de la Lune à celui de la Terre et R le rayon terrestre. C'est l'une des premières considéra-

tions qui ont conduit Newton à la découverte de la loi de la gravitation.

48. *Équations du mouvement d'un point dont l'accélération est donnée.* — En remarquant que l'on a par exemple $\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, on a pour ces équations

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z.$$

Si les composantes φ_x, φ_y, φ_z sont uniquement des fonctions du temps, on obtiendra x, y, z en fonction de t par des doubles quadratures; mais, si elles renferment une, deux ou trois des coordonnées, on s'en tire comme on peut, et le plus souvent pas du tout.

49. *Théorèmes relatifs aux moments et aux aires.* — Soient $O\mathfrak{M}_0$, $O\mathfrak{M}_1$, $O\mathfrak{M}_2$, ..., $O\mathfrak{M}_n$ les axes des moments, relatifs à un point O, des vitesses successives V_0, V_1, ..., V_n d'un point mobile m; P_0, P_1, ..., P_n les distances de ces vitesses au point O; on a

$$\mathfrak{M}_0 = V_0P_0, \qquad \mathfrak{M}_1 = V_1P_1, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{M}_n = V_nP_n.$$

Mais la droite $\overline{\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}_1}$, par exemple, est (n° 20) le moment de l'accélération élémentaire $u = \Phi_0\,dt$; si donc on désigne par Q la distance de Φ au centre du moment O, on a

$$d\,\overline{VP} = \overline{\Phi Q}\,dt,$$

d'où

$$(1) \qquad \overline{V_nP_n} - \overline{V_0P_0} = \int_{t_n}^{t_0} \overline{\Phi Q}\,dt.$$

En désignant par v_0, v_n, ..., φ les projections de V_0, V_n, Φ sur un plan xOy, par p_0, p_n, q leurs distances au centre des moments O, on a

$$2) \qquad v_np_n - v_0p_0 = \int_{t_0}^{t_n} \varphi q\,dt.$$

Donc: *en projection sur un plan l'accroissement du moment de la vitesse par rapport à un point du plan pour un inter-*

[illegible] *les moments des accé-* [illegible] *le.*

[illegible] cela doit être, qu'une [illegible] qui donnent

$$[illegible] - y\varphi_x,$$

$$[illegible] - y\varphi_x,$$

$$[illegible] - y\varphi_2)\,dt,$$

[illegible] le (2) mise sous une [illegible]

[illegible] *asse constamment par* [illegible]

[illegible] donnent

$$[illegible] = C', \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C'',$$

[illegible]

[illegible] ane, ce qui est visible [illegible] de V et $\Phi\,dt$ est com- [illegible] e.

[illegible] pour plan des xy; la [illegible]

[illegible]

[illegible] *la distance au centre* [illegible] forme

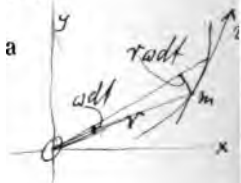
[illegible]

[illegible] partir de Ox,

[illegible] *le rayon vec-*

[illegible] le mobile se

[illegible] laire, on a



[illegible] *ainsi en raison*

[illegible] *de la vitesse et*

[illegible] *ration par le*

[illegible] $= \bar{\varphi} \times \overline{ds}$

[illegible] cilement à ce

[illegible] $+ \varphi_z dz$

[illegible] $+ \varphi_z dz,$

$= \varphi \cos(\varphi, ds)\, ds,$

rajectoire.

parallèle à une direc-

$= \varphi(z - z_0).$

une fonction $\pm f(r)$
nt le signe plus selon
vers O. On a

$dr.$

écanique. — Soient
ux axes fixes Ox, Oy,
système quelconque;
port aux axes mobiles

$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d^2 X}{dt^2},$

ou

$$\frac{dx'}{dt} = v_x - V_x \quad \text{et de même} \quad \frac{d^2y'}{dt} = v_y - V_y, \quad \frac{dz'}{dt} = v_z - V_z,$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \varphi_x - \Phi_x \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \varphi_y - \Phi_y, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \varphi_z - \Phi_z.$$

Ce sont les équations du mouvement de m par rapport aux axes Mx', My', Mz considérés comme fixes, mouvement dans lequel $\bar{v} - \bar{V}$ est la vitesse et $\bar{\varphi} - \bar{\Phi}$ l'accélération.

On voit que ce mouvement résultera dans l'introduction dans le système d'une vitesse et d'une accélération égales et contraires à celle du point M qui est ramené au repos. C'est ce qu'on appelle *imprimer* au système un mouvement égal et contraire à celui de M.

On peut dire aussi que l'on fait subir au système dans la position qu'il occupe à l'instant $t + dt$ le déplacement translatoire $-\left(\overline{V\,dt} + \Phi\frac{\overline{dt^2}}{2}\right)$, égal et contraire à la corde de l'arc décrit par M dans le temps dt.

52. *Du mouvement des projectiles pesants dans le vide.* — Soient

O le point de départ;
v_0 la vitesse initiale inclinée de l'angle α sur l'horizontale Ox,
Oy la verticale du point O dirigée en sens inverse de la pesanteur.

La trajectoire est plane puisque deux vitesses consécutives sont comprises dans un même plan vertical. On a (n° 48)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

d'où, successivement,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

$$x = v_0 \cos\alpha\, t, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t,$$

[illegible] on obtient pour l'équa-

[illegible] $\operatorname{tang}^2\alpha$),

[illegible]

[illegible] précédente, on obtient

[illegible] courbe, ou ce que l'on

[illegible] 2α.

[illegible] la portée atteint son

[illegible] initiale et Oy dans le

[illegible] la parabole prend une

[illegible] obtient immédiatement

[illegible] rayon de courbure de la

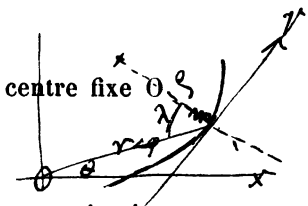
[illegible]).

CHAPITRE IV.

ACCÉLÉRATIONS CENTRALES.

53. *Équations du mouvement d'un point dont l'accélération passe constamment par un centre fixe.* — Nous avons vu (n° 49) que la trajectoire du mobile m est plane.

Soient



Ox une droite fixe quelconque passant par le centre fixe O comprise dans le plan de la trajectoire;

r le rayon vecteur Om;

θ l'angle polaire mOx;

φ l'accélération de m considérée comme positive ou négative selon qu'elle est dirigée vers O ou en sens contraire, et qui est censée uniquement fonction de r;

V la vitesse du mobile.

Le principe des aires (n° 49) donne, en désignant par K une constante,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = K, \tag{1}$$

et le théorème du n° 50

$$d\left(r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2}\right) = -2\varphi\, dr. \tag{2}$$

En éliminant dt entre ces deux équations, on obtient

$$K^2 d\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\frac{dr^2}{d\theta^2}\right) = -2\varphi\, dr$$

ou

$$K^2 \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] = 2\varphi r^2 \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta};$$

ession du facteur $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$,

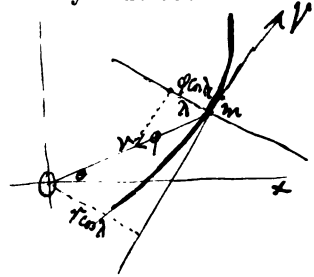
pourra, en désignant
, substituer à l'équa-

$= V^2$,

tion (1), on obtient

$\rho\, dr = V^2$.

; ρ le rayon de cour-



tique des planètes. —
ur du Soleil obéissent
de l'observation :
du Soleil à celui d'une
proportionnellement

re de la planète passe

2° *L'orbite est une ellipse dont le centre du Soleil est un des foyers.*

3° *Les carrés des durées des révolutions des planètes autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.*

Soient $2a$, e le grand axe et l'excentricité relative de l'ellipse et T la durée d'une révolution. On a

$$KT = 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

d'où

$$(b) \qquad K = \frac{2\pi a^2}{T}\sqrt{1 - e^2}.$$

En portant $\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1 - e^2)}$ dans le second facteur de l'expression (3) de φ, on trouve

$$\varphi = \frac{K^2}{r^2}\,\frac{1}{a(1 - e^2)}$$

ou, en ayant égard à (b),

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\,\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}.$$

Donc *l'accélération est dirigée vers le centre du Soleil* et varie en raison inverse du *carré de la distance à ce centre.* D'après la troisième loi de Képler, le coefficient μ *est constant* pour toutes planètes.

55. *Nature de l'orbite décrite par un point dont l'accélération, dirigée vers un centre fixe, est inversement proportionnelle au carré de la distance à ce centre.* — En faisant $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$ dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{\mu}{K^2} = 0,$$

d'où, en désignant par A et α deux constantes arbitraires,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{K^2}[1 + A\cos(\theta - \alpha)].$$

Il suit de là que la trajectoire peut être une des trois coniques dont le centre O est un foyer et α l'inclinaison de l'axe focal sur Ox. Nous ne considérerons que le cas d'une ellipse planétaire en admettant que α est l'angle avec Ox du rayon vecteur mené au périhélie.

Si l'on compare l'équation précédente avec celle-ci,

$$(4) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \alpha)}{a(1 - e^2)},$$

on obtient la relation

$$(b') \qquad K = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}.$$

En introduisant la *vitesse moyenne* $n = \frac{2\pi}{T}$ de la planète et identifiant les valeurs (b) et (b'), on trouve

$$(5) \qquad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

On déduit de l'équation (4)

$$dr = \frac{a(1 - e^2)e\sin(\theta - \alpha)\,d\theta}{[1 + e\cos(\theta - \alpha)]^2} = \frac{re\sin(\theta - \alpha)\,d\theta}{1 + e\cos(\theta - \alpha)};$$

on a par suite, pour le carré de l'arc élémentaire,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{[1 + e\cos(\theta - \alpha)]^2}[1 + e^2 + 2e\cos(\theta - \alpha)]\,d\theta^2 \\ &= \frac{r^4}{a^2(1 - e^2)}[1 + e^2 + 2e\cos(\theta - \alpha)]\,d\theta^2 \\ &= \frac{r^4}{a^2(1 - e^2)}\left[-1 + \frac{2a}{r}\right]d\theta^2. \end{aligned}$$

En divisant par dt^2 et remplaçant respectivement $\frac{d\theta}{dt}$ et K par leurs valeurs (1), (b'), on obtient

$$(6) \qquad V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Si dans la formule (a) on fait $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, qu'on substitue à K et V leurs valeurs (b') et (6), qu'on désigne par $2b$ le demi petit axe de l'ellipse et par r' le rayon vecteur émanant du

second foyer, on trouve

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{[r(2a-r)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(rr')^{\frac{3}{2}}}$$

et, en remarquant que $b^2 = r\cos\lambda\, r'\cos\lambda$, on retombe sur la formule connue $\rho = \frac{rr'}{a\cos\lambda}$.

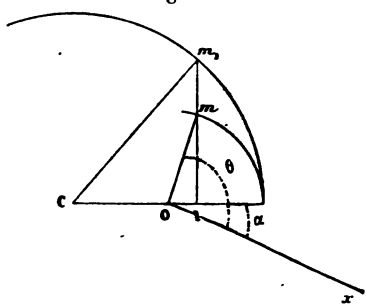
On a donné respectivement à α, θ, $\theta - \alpha$ les noms de *longitude* du *périhélie*, de *longitude vraie* et d'*anomalie vraie*.

Comme r est compris entre $a(1-e)$ et $a(1+e)$, on peut écrire

$$r = a(1 - e\cos u). \tag{7}$$

L'angle u, appelé *anomalie excentrique*, est susceptible d'une interprétation géométrique. Soient (*fig.* 16)

Fig. 16.



C le centre de l'ellipse;
m la position de la planète dont r et θ sont les coordonnées;
I sa projection sur le grand axe;
m_1 l'intersection de la direction de Im avec le cercle décrit sur cet axe comme diamètre.

On a

$$\widehat{mOI} = \theta - \alpha, \qquad CI = a\cos m_1 CI,$$

$$CI = OI + CI = \frac{a(1-e^2)\cos(\theta-\alpha)}{1+e\cos(\theta-\alpha)} + ae$$

$$= \frac{a}{e}\left[1 - \frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta-\alpha)}\right] = \frac{a}{e} - \frac{r}{e}$$

trouve

valeur (b) de K, on

$e^2\,dt.$

on remplace ensuite

$du,$ ✓

$du.$ ✓

oyen de la planète.

ant autour du Soleil

avec la vitesse angu-

instant t. La formule

$u = \theta' - \alpha$ et accen-

t en même temps au

périhélie, il faut que les formules (11) et (11′) donnent pour nt la même valeur en y faisant respectivement $u = 0$, $\theta' - \alpha = 0$, ce qui exige que $\varepsilon' = \varepsilon$. Alors les planètes passeront aussi en même temps à l'aphélie ($u = \pi$, $\theta' - \alpha = \pi$). On voit, d'après la formule (11′), que l'origine du temps correspond à $\theta' = \varepsilon$, constante qui a reçu le nom de *longitude moyenne de l'époque*.

L'équation (4) et l'équation (8), en y supposant u éliminé au moyen de (11), seront les intégrales générales des équations du mouvement, savoir la dérivée de (1) par rapport au temps et (2), puisque dans (4) et (8) on a introduit les quatre constantes a, e, α, ε.

Nous supposerons maintenant que θ, t sont mesurés à partir d'un passage au périhélie; alors nous aurons $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0$. La détermination de u, r, θ en fonction de t rentre dans le domaine de la Mécanique céleste [1]. Nous ne considérerons que le cas où e est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, comme on peut le faire pour la Terre ($e = 0{,}017$), Uranus ($e = 0{,}047$) et deux planètes intermédiaires.

La formule (11) donne

$$u = nt + e \sin nt;$$

la formule (7),

$$r = a(1 - e \cos nt).$$

La formule (8) se réduit à $\cos\theta = \cos u - e \sin^2 u$, d'où $\theta = u + e \sin u$, ou

$$\theta = nt + 2e \sin nt;$$

on a donné à $2e \sin nt$ le nom d'*équation du centre*.

56. *Mouvement d'un point dont l'accélération dirigée vers un centre fixe est proportionnelle à la distance à ce centre.* — En désignant par μ^2 une constante, nous poserons $\varphi = \mu^2 r$. Il est inutile d'avoir recours aux coordonnées polaires parce que les variables se trouvent séparées dans les équations du mouvement en coordonnées rectilignes. En désignant par A,

---

[1] *Voir* notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, 2e édition, p. 65 et suivantes.

B, γ, δ quatre constantes arbitraires, les intégrales des équations

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y$$

sont

$$x = A\cos(\mu t + \gamma), \qquad y = B\sin(\mu t + \delta).$$

En les résolvant par rapport à $\cos\mu t$, $\sin\mu t$ et faisant la somme des carrés, on obtient

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + 2\sin(\gamma - \delta)\frac{xy}{AB} = \cos^2(\gamma - \delta),$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre.

Soient

Ox' la direction du grand axe de l'ellipse;
α son inclinaison sur Ox;
$2a$, $2b$ le grand axe et le petit axe de l'ellipse.

Nous aurons

$$(a) \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Les constantes A, B, $(\gamma - \delta)$ pourront s'exprimer au moyen de a, b, α qu'on leur substituera. Si θ est l'angle du rayon vecteur r avec Ox, l'équation (a) se transforme dans la suivante :

$$(2) \qquad r^2[a^2\sin^2(\theta - \alpha) + b^2\cos^2(\theta - \alpha)] - a^2b^2 = 0.$$

En désignant par ε une constante arbitraire, on peut écrire

$$(b) \qquad x' = a\cos(\mu t + \varepsilon), \qquad y' = b\sin(\mu t + \varepsilon),$$

d'où, en remarquant que $\frac{y'}{x'} = \operatorname{tang}(\theta - \alpha)$,

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(\theta - \alpha) = \frac{b}{a}\operatorname{tang}(\mu t + \varepsilon).$$

Les équations (2) et (3), qui renferment les quatre arbitraires a, b, α, ε, seront les intégrales complètes des équations du mouvement.

Si dans

$$V^2 = \frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{dy'^2}{dt^2} = \left(\frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2\right),$$

μ^2

on élimine x', y' au moyen de (a) et de $x'^2 + y'^2 = r^2$, on trouve

$$(4) \qquad V^2 = \mu^2(a^2 + b^2 - r^2).$$

On a ensuite $\dfrac{x'dy' - y'dx'}{dt} = \mu ab$ ou

$$(5) \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = \mu ab \text{ (1)}.$$

---

(1) Si φ était centrifuge, il faudrait changer les signes du second membre de (1) et l'on aurait

$$x = Ae^{\mu t} + A'e^{-\mu t}, \qquad y = Be^{-\mu t} + B'e^{\mu t}.$$

En résolvant par rapport à $e^{\mu t}$ et $e^{-\mu t}$, puis faisant le produit, on trouve

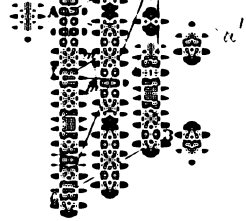
$$BB'x^2 + AA'y^2 - xy(AB + A'B') + (AB - A'B')^2 = 0,$$

équation d'une hyperbole.

CHAPITRE V.

[illegible] MENT D'UN SYSTÈME [illegible]

[illegible] *stème invariable* (S) [illegible] instant t (*fig.* 17),



[illegible] ;
[illegible] du système.

[illegible] a décrit autour de OA [illegible] stantanée sera devenue [illegible] ntour de OA′, en accen-

[illegible] t $\overline{OB} = \overline{AA'} = \alpha\, dt$; en [illegible] direction OB, l'accrois- [illegible] de la vitesse de m sera

[illegible] $\alpha\, dt u$,

d'où, pour l'accélération du point m,

$$\overline{\varphi} = \overline{\omega^2 r} + \overline{\alpha u}.$$

On a donné respectivement à $\alpha\, dt$, α les noms d'*accélération angulaire élémentaire* et d'*accélération angulaire*. Il est évident que les accélérations angulaires se composeront et se décomposeront comme les accélérations linéaires.

Il résulte de l'expression ci-dessus que *l'accélération de m est la résultante de l'accélération centripète due à la rotation instantanée* et *de l'accélération due à l'accélération angulaire.*

En désignant par $d\gamma$ l'angle $\widehat{AOA'}$, les composantes de α suivant OA et sa perpendiculaire seront $\frac{d\omega}{dt}$, $\omega \frac{d\gamma}{dt}$. Si ω conserve une direction fixe, α se réduit à $\frac{d\omega}{dt}$, comme cela devait être.

Soient n, p, q les composantes de ω suivant trois axes fixes Ox, Oy, Oz; on a évidemment

$$\alpha_x = \frac{dn}{dt}, \qquad \alpha_y = \frac{dp}{dt}, \qquad \alpha_z = \frac{dq}{dt}.$$

58. *Projection de l'accélération angulaire sur un* axe *fixe dans* (S). — Soient

Ox, Ox' les positions de l'axe aux instants t, $t + dt$;
a, a_1 les projections du point A sur ces directions;
a' la projection du point A' sur Ox';
$n = \overline{Oa}$ la composante de ω suivant Ox;
$n + dn = \overline{Oa'}$ la composante de ω' suivant Ox'.

Comme $\widehat{AOx} = \widehat{AOx'}$, on a $Oa_1 = n$, par suite $\overline{a_1 a'} = dn$ et enfin

because OA is the inst. axis

$$\alpha_x = \frac{dn}{dt};$$

ainsi les choses se passent de la même manière que si Ox était fixe.

d'un point m suivant
fixes dans (S). — La
aire est

de OA avec Ox, Oy,

$\cos\gamma$,

x,

$\cos\alpha - x]$.

$$\omega^2 = n^2 + p^2 + q^2,$$

nqz.

$$z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt},$$

ations tournantes.

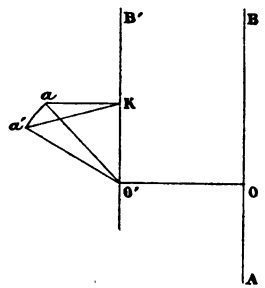
n système invariable
ccélération d'un point
stème un mouvement
né au repos; dans cet
sulte des formules du
, l'accélération réelle

CHAPITRE VI.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT PAR RAPPORT A UN SYSTÈME INVARIABLE.

61. *De l'accélération dans le mouvement relatif d'un point m par rapport à un système invariable* (S). — Soient (*fig.* 18)

Fig. 18.



V, φ la vitesse et l'accélération à l'instant t du point m dans son mouvement absolu;

V_e, φ_e la vitesse et l'accélération ~~ou~~ d'entraînement du point O' du système invariable (S) où se trouve actuellement m;

$\overline{V_r} = \overline{V} - \overline{V_e}$ la vitesse relative de m par rapport à (S);

ω la rotation autour de l'axe instantané AB de (S);

O la projection de O' sur AB;

U_r la projection de V_r sur un plan perpendiculaire à AB.

Concevons qu'on imprime à m et à (S) le mouvement de translation ($-V_e$, $-\varphi_e$); le point O' restera fixe pendant deux éléments consécutifs du temps et (S) tournera instanta-

nément avec la vitesse angulaire ω autour de la parallèle $O'B'$ à OB.

Le point m sera alors animé de la vitesse relative V_r et de l'accélération $\overline{\varphi'} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi_e}$ et décrira dans le temps dt l'élément $O'a = V_r dt$.

O'/ En imprimant maintenant à (S) et au point mobile la rotation $-\omega$, autour de $\phi B'$, (S) sera ramené au repos et, dans le temps dt, $O'a$ sera venu en $O'a'$.

Soit $\overline{aK} = U_r dt$ la projection de $\overline{O'a}$ sur un plan perpendiculaire à $O'B'$. On aura

$$\overline{aa'} = U_r dt\, \omega\, dt = 2\omega U_r \frac{dt^2}{2},$$

déplacement dû à une accélération $2\omega U_r$ dite *centrifuge composée*. On aura donc pour l'accélération dans le mouvement relatif

$$\overline{\varphi_r} = \overline{\varphi'} + \overline{2\omega U_r} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi_e} + \overline{2\omega U_r},$$

ce qui exprime que (théorème de Coriolis) *l'accélération dans le mouvement relatif se compose de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement changée de sens et de l'accélération centrifuge composée.*

On voit que $2\omega U_r$ est le double de la vitesse de l'extrémité de la droite $O'V_r = V_r$ autour de $O'B'$ et que la direction de l'accélération centrifuge composée s'obtiendra en changeant le sens de cette vitesse; on peut dire aussi que cette direction s'obtient en faisant tourner U_r de 90° en sens inverse de la rotation instantanée.

Le point m sera en repos relatif si $V_r = 0$ ou $V = V_e$ et si $\varphi = \varphi_r$.

Les formules établies pour le mouvement absolu s'appliquent au mouvement relatif en y introduisant les accélérations apparentes, c'est à dire : centrifuge composée et d'entraînement.

Soit $ds = V_r dt$ l'élément du chemin décrit par m dans son mouvement relatif. Comme $2\omega U_r$ est perpendiculaire à ds, on a

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}(V_r^2 - V_{r0}^2) = \int \varphi \cos(\varphi, ds)\, ds - \int \varphi_e \cos(\varphi_e, ds)\, ds.$$

Cette formule ne peut être utile que lorsque les intégrations peuvent s'effectuer. L'accélération φ_e est censée connue en vertu du n° 60; dans le cas où (S) tourne autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante, φ_e est l'accélération centrifuge $\omega^2 r$; par suite

$$-\int \varphi_e \cos(\varphi_e, ds)\, ds = \frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2}.$$

62. *Composition des accélérations centrifuges composées.* — 1° Supposons que la vitesse relative soit une somme géométrique $\overline{V_r} = \overline{v_r} + \overline{v'_r} + \ldots$, et soient u_r, u'_r, ... les projections de v_r, v'_r, ... sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané, on a

$$\overline{U_r} = \overline{u_r} + \overline{u'_r} + \ldots,$$

d'où, en faisant tourner le système des vitesses de 90° en sens inverse de ω,

$$2\overline{\omega U_r} = 2\overline{\omega u_r} + 2\overline{\omega u'_r} + \ldots.$$

2° Supposons que ω soit une somme géométrique

$$\overline{\omega} = \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \ldots,$$

et que U'_r, U''_r, ... soient les projections de V_r sur des plans perpendiculaires aux rotations ω', ω'', ... On a pour la vitesse de l'index V_r autour de $O'B'$

$$\overline{\omega U_r} = \overline{\omega' U'_r} + \overline{\omega'' U''_r} + \ldots,$$

par suite

$$2\overline{\omega U_r} = 2\overline{\omega' U'_r} + \ldots$$

3° Il résulte de ces deux théorèmes que, si V_r, ω *sont deux sommes géométriques, l'accélération centrifuge composée est la résultante de celles que l'on obtient en combinant deux à deux les éléments des deux sommes.*

63. *Équations différentielles du mouvement relatif d'un point.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes fixes dans (S); n, p, q les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la rotation instan-

[illegible]

$$V_{rz} = \frac{dz}{dt},$$

$$\varphi_{rz} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

[illegible] t seuls des accéléra- [illegible] et qui sont $-2p\frac{dz}{dt}$, [illegible] ivantes dont les deux [illegible] s tournantes

$$[illegible] p\frac{dz}{dt}\Big),$$

$$[illegible] q\frac{dx}{dt}\Big),$$

$$[illegible] n\frac{dy}{dt}\Big).$$

[illegible] En les ajoutant après [illegible] ar dx, dy, dz, et inté- [illegible]

[illegible] *anteur à la surface de* [illegible]

[illegible] Terre; [illegible] de la surface de la [illegible] $\bar{m} = R$; [illegible] eur, c'est-à-dire celle [illegible] nait pas autour de son [illegible]

[illegible] i est observée parce [illegible] e par V_r.

[illegible]

$$[illegible] R\cos\lambda\cos\lambda,$$

[illegible] sidéral, on a

[illegible] $g = 9^m,8088$,

[illegible] ral

[illegible] buée à l'apla-

[illegible] *à la surface*

[illegible] ère boréal;

[illegible] e Oy s'obtient

[illegible] vers la droite

[illegible] pieds en O. On devra [illegible] parallèle dans le sens [illegible]

[illegible] centrifuge, on a

$$\varphi_z - \varphi_{ez} = g;$$

$$[illegible] = \omega \sin\lambda.$$

[illegible] aux suivantes

$$[illegible]$$

$$[illegible] = [illegible] \lambda \frac{dz}{dt}\Big),$$

$$[illegible]$$

[illegible] composantes de la vitesse [illegible] ons (4) et (6) donnent

$$[illegible]$$

$$[illegible] c.$$

[illegible] n (5), on obtient une [illegible] grer quel que soit ω; [illegible] ω^2, on a simplement

$$[illegible] - gt\cos\lambda),$$

$$[illegible]$$

$$b = [illegible] - gt^2\frac{\cos\lambda}{2}\Big],$$

$$b = [illegible] - \frac{gt}{3}\cos\lambda\Big),$$

[illegible] $= a = b = c$,

[illegible] y a donc une

[illegible] tion. Abstrac-

[illegible] $\frac{v^2}{r}$

[illegible] $\frac{v^2}{r}$

[illegible] $\frac{v^2}{r}$

mouvement relatif

Soient

(X, z),

(Y, z),

(Z, z);

les à OX, OY, OZ;

$+ \frac{d^2\zeta}{dt_2}$ la vitesse et

ar rapport aux deux

$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{d^2Z}{dt^2}$ la vitesse

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}$ sa vitesse

relatif;

nement.

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

$$= 0, \quad a''\frac{da''}{dt} + \ldots = 0.$$

$$ab + a'b' + a''b'' = 0$$

$$\left(b''\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt}\right) = n,$$

$$\left(c''\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt}\right) = p,$$

$$\left(a''\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right) = q,$$

[illegible] n à n, p, q.
[illegible] au temps les

V_{rz},

V_{rz},

V_{rz},

$b\varphi_{ry} + c\varphi_{rz}$

$b'\varphi_{ry} + c'\varphi_{rz}$

$b''\varphi_{ry} + c''\varphi_{rz}$

$= cV_x + c'V_y + c''V_z$,

$= \ldots$,

$= \ldots$,

$$a'' \frac{d^2 a''}{dt^2}\Big)$$

$$a'' \frac{d^2 b''}{dt^2}\Big)$$

$$a'' \frac{d^2 c''}{dt^2}\Big)$$

$$y),$$

.....,

.....

$= 0$, $\varphi_r = 0$, donne-

t que n, p, q sont les

de (S) suivant Ox,

s'écrire

$$V_{ry}),$$

$$V_{rx}),$$

$$V_{ry}),$$

ns (3) du n° 63.

[illegible]

[illegible] TÉRIELS

[illegible]

[illegible]

[illegible] EL.

[illegible]

[illegible] peut se diviser [illegible] la *molécule*.

[illegible] ensions d'une [illegible] urquoi on fait [illegible] une molécule [illegible] e qu'il possède [illegible]

[illegible] bligé de consi- [illegible], sans se pré- [illegible] os quelle qu'en [illegible]

[illegible] s élémentaires [illegible] ons physiques [illegible]

[illegible] *point matériel* [illegible] *os, ni changer*

[illegible] *l est en mouvement*

[illegible] ORCE.

[illegible] r une force F, dans [illegible] imé de la vitesse v, [illegible] ntaire $\varphi\, dt$. Soit φ' [illegible] ce F′ sur le point m [illegible] n'a aucune notion [illegible] onduit à considérer [illegible] effets qu'elles pro-

[illegible] ce rapport comme

[illegible] *uit par une force sur* [illegible] *itesse de ce point.*

[illegible] p la force, appelée [illegible] de la pesanteur. On [illegible] ifique pour la molé-

[illegible] iel.

[illegible] nécessairement la

[illegible] célérations variables [illegible] onduit à considérer [illegible]

[illegible] e proportionnelle à [illegible] on qu'elle produit.

[illegible] *s.* — Soient [illegible] accélérations [illegible] les forces [illegible] a, en multi- [illegible]

[illegible] *l'action des* [illegible] *sur un point* [illegible] *si les autres* [illegible]

[illegible] me les accé- [illegible]

[illegible] is la force f, [illegible] utralisent, ou [illegible] ont équilibre. [illegible] sur m et ne [illegible] aucune d'elles [illegible]

[illegible] *la force qui* [illegible] ent pour ces [illegible]

[illegible] la courbure [illegible]

[illegible] *int matériel.* [illegible] roblèmes qui [illegible] et du Calcul [illegible]

[illegible], déterminer

[illegible] données de la trajec-

[illegible] tions de la trajectoire,

[illegible] dit de *l'égalité de* [illegible] *ints matériels m, m'* [illegible] *ractive ou répulsive,* [illegible] *droite qui joint les* [illegible] *opposée à celle de m'*

[illegible] l'observation l'action

[illegible] des masses, et en le

[illegible] *proportionnelle au produit* [illegible] *stance.*

[illegible] soient M, *m* les masses [illegible] leur action mutuelle.

[illegible] nent $\Phi = f\frac{m}{r^2}$, $\varphi = f\frac{M}{r^2}$.

[illegible] e un mouvement égal [illegible] u repos. L'accélération

[illegible]

a³/

[illegible] 54), d'où

[illegible] membre de [illegible] les planètes [illegible] donc qu'ap- [illegible] une petite

[illegible] comme on le [illegible] tivement au [illegible] res. Si donc [illegible] accélération [illegible] $\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ à

[illegible] *matériel.* — [illegible] à un point [illegible] ds) ds de la [illegible] mées du mo- [illegible] l'intervalle,

[illegible] onstamment [illegible] travail total; [illegible] ntielle de F,

[illegible] nt pour base [illegible] grale. [illegible] à trois axes

[illegible] d'après un théorème

[illegible] $+ Z\,dz.$

[illegible] cette équation soit la [illegible] de x, y, z, appelée

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

[illegible] hypothétique δs de m, [illegible] en Mécanique. On a

[illegible] $+ Z\delta z,$

[illegible] $= \delta V,$

[illegible] quand on y remplace

[illegible] résente la famille des

[illegible] ur la surface de niveau [illegible] tuel est nul. Donc la

[illegible] es de niveau consécu- [illegible] est $F\,d\sigma$.

[illegible] est parallèle à un axe [illegible] ces de niveau $Fz = C$; [illegible] arallèles. Ce cas est [illegible] ur une étendue suffi- [illegible] terre.

[illegible] fonction $\varphi(r)$ de la [illegible] O, considérée comme [illegible] rce F est attractive ou [illegible] est une fonction de r,

[illegible] es surfaces
[illegible] oint O.
[illegible] elativement

[illegible] *ériel.* — En
[illegible] n° 48 de la

[illegible]

[illegible] *vement;* X *dt*
[illegible] *dt* est l'*im-*
[illegible] on ci-dessus
[illegible] *ccroissement*
[illegible] *ulsion de la*

[illegible] ltipliée par x
[illegible] e les limites

[illegible] f celle de la
[illegible] et f à l'ori-

[illegible] *l'accroissement du* [illegible] *t par rapport à un* [illegible] *l'impulsion élémen-*

[illegible]que

[illegible] ds,

[illegible] ds) ds.

[illegible]arré de la vitesse est [illegible]*sse due à la vitesse* V. [illegible]que : *le demi-accrois-* [illegible]*riel est égal au travail* [illegible] (*principe de la force*

[illegible]é par $\mathcal{F}(x, y, z)$, on a

[illegible] x_0, y_0, z_0),

[illegible] valeur, au sens près, [illegible]face de niveau.

[illegible]. — Les équations (1) [illegible]

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

[illegible]

$$\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0.$$

[illegible] dimensions pour qu'on [illegible]r comme un point ma-

tériel. Si avec la main on exerce sur ce corps un effort F qui lui imprime l'accélération φ, on éprouvera une réaction ou résistance $-m\varphi$ égale et contraire à F. Cette réaction $-m\varphi$ qu'oppose la masse m à la variation de son mouvement est ce qu'on appelle la *réaction de l'inertie*. On voit aussi comment la masse m peut être considéré comme le *coefficient de la résistance de la matière au changement de mouvement*. Quoique la force d'inertie n'agisse pas sur le mobile m, on peut cependant la considérer comme faisant fictivement équilibre sur ce point à la force qui le sollicite, et c'est ce qu'expriment les équations ci-dessus. Partant de là, on voit que dans le mouvement de m on a

$$\text{trav. total de F} + \text{trav. total de la force d'inertie} = 0,$$

ce qui montre que le demi-accroissement de la force vive, changé de signe, n'est autre chose que le travail dû à la force d'inertie.

On se rend compte de la force d'inertie en remarquant que pour entretenir le mouvement uniforme d'un wagon il suffit de la part de l'homme d'un effort peu considérable pour neutraliser l'influence des résistances passives dont nous nous occuperons plus tard; plus on accélère le mouvement du wagon, plus la résistance qu'on éprouve est considérable. La réaction de l'inertie joue le rôle d'une véritable puissance, si, au contraire, on veut ralentir le mouvement du wagon en agissant sur une corde qui lui est fixée par une extrémité.

Nous ferons remarquer qu'on peut considérer la force d'inertie comme la résultante de deux autres forces : l'une, dirigée suivant la tangente en sens inverse de l'accélération tangentielle, l'autre, suivant la normale principale tendant à éloigner le mobile du centre de courbure de la trajectoire et appelée pour ce motif *force centrifuge*.

12. *Des forces apparentes dans le mouvement relatif d'un point matériel par rapport à un système invariable.* — Nous pouvons considérer les accélérations centrifuge composée et d'entraînement comme produites par deux forces fictives aux-

[illegible] nominations, d'où cet

[illegible] *atériel par rapport à* [illegible] *nt absolu qu'il pren-* [illegible] *re et des forces appa-* [illegible] *nement prise en sens*

[illegible] trifuge composée dé- [illegible] ie subsistent évidem- [illegible] sée. Cette force étant [illegible] t ne figure pas dans [illegible] iennent que la force [illegible] rise en sens contraire.

[illegible] **ans un milieu résistant.**

[illegible] molécules assez étendu [illegible] qui le traversent pour [illegible] ini, exemples : la mer, [illegible]

[illegible] u opposent à un solide [illegible] n une résistance qui [illegible] V ; on suppose qu'elle [illegible] ance $n \geq 1$ de la vitesse. [illegible] un point matériel, et [illegible] nception est conforme [illegible] istance par $mg\left(\frac{V}{k}\right)^n$.

[illegible] *pesant.* — On a pour

$$[illegible]^n,$$

[illegible]

et, pour l'ascension,

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - mg\left(\frac{V}{k}\right)^n,$$

d'où

$$\text{(B)} \qquad dt = -\frac{1}{g}\frac{dV}{1+\frac{V^n}{k^n}}.$$

L'intégration des expressions (A), (B) pourra s'effectuer si n est un nombre entier.

Nous allons spécialement étudier le cas de $n = 2$, valeur généralement admise. La formule (A) peut se mettre sous la forme

$$dt = \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{1+\frac{V}{k}} + \frac{1}{1-\frac{V}{k}}\right)dV,$$

d'où, en exprimant que $t = 0$ pour $V = 0$,

$$2gt = k\log\frac{1+\frac{V}{k}}{1-\frac{V}{k}}.$$

Si l'on résout par rapport à V et si l'on désigne par z le chemin parcouru, on trouve

$$(1) \qquad V = k\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}} = \frac{dz}{dt},$$

d'où

$$dz = \frac{k^2}{g}\left(\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}\right)d\frac{gt}{k},$$

et, en exprimant que $z = 0$ pour $t = 0$,

$$(2) \qquad z = \frac{k^2}{g}\log\frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}.$$

En éliminant t entre les équations (1) et (2), on exprimera V en fonction de z; mais il est plus simple d'avoir recours à

[illegible] RE I.

[illegible] dz,

[illegible]

[illegible] p [illegible],

[illegible]

[illegible] ne, eu égard à $V = V_0$

[illegible] $\frac{gt}{k}$,

[illegible]

[illegible] $\frac{dz}{dt}$.

[illegible]

[illegible] $d\frac{gt}{k}$

[illegible]

[illegible] $\sin\frac{gt}{k}$.

[illegible] le mobile; t' la durée

[illegible] n y faisant $V = 0$,

[illegible]

et, en ayant égard à cette valeur, l'équation (4) conduit à

$$z' = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2 + V_0^2}{k^2}. \tag{5}$$

Soit t'' la durée de la chute; la formule (2) donne, en y remplaçant z par la valeur de z' et t par t'',

$$e^{\frac{gt''}{k}} + e^{-\frac{gt''}{k}} = \frac{2}{k}\sqrt{k^2 + V_0^2},$$

d'où

$$\left(e^{\frac{gt''}{k}}\right)^2 - \frac{2}{k}\sqrt{V_0^2 + k^2}\, e^{\frac{gt''}{k}} + 1 = 0.$$

Le produit des racines étant 1, cette équation fera connaître $e^{\frac{gt''}{2}}$ et $e^{-\frac{gt''}{2}}$. On devra donc prendre

$$e^{\frac{gt''}{k}} = \frac{\sqrt{V_0^2 + k^2} + V_0}{k},$$

d'où

$$t'' = \frac{k}{g} \log \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + k^2}}{k}. \tag{6}$$

La durée totale de l'ascension et de la chute sera

$$t' + t'' = \frac{k}{g}\left(\text{arc tang}\,\frac{V_0}{k} + \log \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + k^2}}{k}\right).$$

15. *Mouvement d'un projectile pesant dans l'air* (*courbe balistique*). — La trajectoire est comprise dans un plan vertical xOy puisque deux vitesses consécutives sont comprises dans un pareil plan.

Soient

O le point de départ;
V_0 la vitesse initiale;
α_0 l'*angle de tir* ou l'inclinaison de V_0 sur l'horizontale Ox située dans le plan de la trajectoire;
Oy la verticale de O dans le plan ci-dessus, dirigée en sens inverse de la pesanteur;

toire à l'instant t;

on du mouvement de
stance du milieu. En
la trajectoire, cette

rtir de $\alpha = \alpha_0$, il faut

uations (a), (b), on

$$= 0$$

$$= 0,$$

e est

$$\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}\Big),$$

$$\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha},$$

$$\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha} = 0.$$

quadratures

me que l'on a

$$p^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dp$$

[illegible] correspond à $p = 0$, [illegible]; car autrement, eu [illegible] ite. Donc *au-dessous* [illegible] *plus en plus à devenir* [illegible]

[illegible] grande pour qu'on [illegible] en faisant $q = -p$ [illegible]

$$\int_{p_1}^{p} (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp$$

$$\int_{q_1}^{q} q^{n-1} dq$$

$$\frac{1}{n}(q^n - q_1^n).$$

[illegible] aleur se réduit sensi- [illegible] evient

$$\frac{N_0^n q^n}{k(1+p^2)^{\frac{n}{2}}} = k,$$

[illegible] tait infini. Il suit de [illegible] ent et qu'elle a pour [illegible] nification de q,

$$\int^{q} \frac{V^2 dq}{1+q^2}.$$

[illegible] la seconde intégrale, [illegible] par k^2, et alors on

[illegible] et que, par [illegible] on ne peut [illegible] matio n.

[illegible] **ions du mou-** [illegible] **la variation**

[illegible] censée égale [illegible] *e principa le* [illegible] *atrice* χ qui [illegible] arier avec la [illegible]

[illegible] $, a_4)$ [illegible] sans seconds [illegible] stantes arbi- [illegible] re aux équa- [illegible] les a_i comme [illegible] bstitution de [illegible] ons que deux [illegible] ces dernières [illegible] nditions

[illegible],

[illegible]

[illegible] d'un point isolé;

[illegible]

[illegible],

[illegible]*ème en grandeur et* [illegible]*obile, que l'on con-* [illegible]*variables.*

[illegible] $\frac{\partial^2 f_x}{\partial a_i \partial t} \frac{da_i}{dt}$,

[illegible] $\frac{\partial^2 f_y}{\partial a_i \partial t} \frac{da_i}{dt}$,

[illegible]

[illegible] $= \chi_x$,

[illegible] $= \chi_y$.

[illegible] les fonctions x, y, t, [illegible]ations (3) et (5) on [illegible]

[illegible],

[illegible]leur de χ. En négli- [illegible] dans cette fonction, [illegible], les a_i comme ayant [illegible]tiendra ainsi par une [illegible] Δt et ainsi de suite;

[illegible] t_0, on ait trouvé les [illegible] A_j de la trajectoire [illegible]entes à la trajectoire [illegible]t que la ligne en A_j [illegible]ait la trajectoire si, [illegible]t à disparaître.

centrale et

rapport au

ent

= o

bres. On a

= o,

= o.

les mêmes

, les équa-

U + const.,

des a_i intro-

$$= 2\frac{dv}{dt}.$$

a une équation de la

$$= p.$$

ont de déterminer les

un milieu dont la résis-
nnelle au carré de la
ance que nous consi-
ce.
nt elliptique (Ire Partie,

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(\theta-\alpha)}{1+e\cos(\theta-\alpha)},$$

mouvement

$$- e\cos u),$$

$$u.$$

$a(1-e^2)\,ds.$

$pa(1-e^2)\,ds,$

$ds,$

n (b) donne

$\cos(\theta-\alpha)],$

$de,$

$u\Big]\,de.$

), puis qu'on

[illegible] TRE 1.

[illegible] ds.

[illegible] $u - \varepsilon + \alpha$.

[illegible] antes dans celle des [illegible], on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial e} = -\frac{\sin u}{1 - e^2}.$$

[illegible]

[illegible] $\varepsilon + \alpha)$ $da + d\varepsilon$

[illegible] $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\Big]\, d\alpha$

[illegible]

[illegible] placé da, de, $d\alpha$ par [illegible] moyen des dernières

[illegible] z petite pour que nous [illegible] rons

[illegible] $)]\, d\theta$

[illegible]

[illegible] $\cos 2(\theta - \alpha)]\Big\}\, d\theta$,

[illegible] $(\theta - \alpha)\Big]\, d\theta$.

[illegible] δ les variations éprou- [illegible] évolution elliptique ou

[illegible] ntre les li-

[illegible]

[illegible] aurait donc [illegible] ce moyenne [illegible] que la dis- [illegible] ieu n'existe

[illegible] *ction d'une* [illegible] *stance et à* [illegible] vé (Ire Par-

[illegible]

[illegible] ont,

[illegible] o,

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $dt - \frac{b\,dw}{\mu^2}\Big)$.

[illegible] uations (6)

[illegible] TRE I.

[illegible]

[illegible] db

[illegible] $d\alpha\Big] = ab\,d\,ab,$

[illegible] $\frac{b}{a}\,\frac{d\varepsilon}{\cos^2(\mu t+\varepsilon)}$

[illegible] des relations (c), (d),

[illegible]

[illegible] $-\alpha)\,db,$

[illegible] $-b\,d\alpha) - ab\,d\alpha;$

[illegible] équation (c) prend la

[illegible] $(1-e^2);$

[illegible] $(\theta-\alpha)$

[illegible] $-\alpha)$

[illegible]

[illegible] $\theta-\alpha)\,d\theta$

[illegible] $-\alpha)$

[illegible] tion (c'),

[illegible] $-e^2\cos^2(\theta-a)]^{-\frac{3}{2}}\,d\theta.$

[illegible] ra dans les formules [illegible] a alors l'angle du rayon [illegible] idérera que les varia- [illegible] b, α, ε à la fin d'une [illegible] une manière générale

[illegible]

[illegible] résistance [illegible] elle au carré [illegible]

[illegible] ds.

[illegible] que, dans le [illegible]

[illegible] $67\rho a^2$.

[illegible] convenu plus [illegible] formule (c'), [illegible]

[illegible] $\frac{\cos^2\theta\, ds}{e^2\cos^2\theta}$.

[illegible] d'un cercle [illegible] a [illegible]

[illegible] us haut que, [illegible] ρa^2 affecté [illegible]

[illegible] $P_i \cos 2i\theta$,

[illegible]n a notamment

$$[illegible] \frac{7641}{2048} e^8 + \ldots,$$

$$[illegible] \frac{29}{48} e^6 + \ldots \Big);$$

[illegible] laissent à désirer au [illegible]ttra plus loin P_0, P_1 [illegible]ant, eu égard à la va-

$$[illegible] d\theta,$$

$$[illegible] \cos 2i\theta \, d\theta;$$

$$[illegible] b^2(1-e^2)\pi\left(P_0 + \frac{P_1}{2}\right).$$

$$[illegible] \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{[illegible] + \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

$$[illegible] \operatorname{tang} \beta$$

$$[illegible] \operatorname{tang}^2 \beta,$$

$$[illegible] \frac{[illegible] - e^2)}{[illegible]^2)^2},$$

$$[illegible] (\operatorname{tang} \beta \cos 2\theta + \operatorname{tang}^2 \beta)^{-\frac{5}{2}}.$$

$$[illegible] = \Sigma_0 A_i \cos 2i\theta,$$

$$[illegible] = \Sigma_0 B_i \cos 2i\theta,$$

[illegible]re les A_i, B_i, et l'on

aura

$$P_0 = M\left(A_0 B_0 + \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots}{2}\right),$$

$$P_1 = M\left(A_0 B_1 + A_1 B_0 + \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_2 B_3 + \ldots}{2}\right),$$

par suite δa et δb.

La première des équations (2) donne, eu égard aux valeurs (5),

$$d\alpha = \frac{\rho b^2 \sin 2\theta}{a^2 - b^2} \frac{ds}{1 - e^2 \cos^2 \theta};$$

d'où $\delta\alpha = 0$, puisque les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux. Donc les axes de l'ellipse conservent des directions fixes.

Nous ne croyons pas devoir nous arrêter au calcul de $d\varepsilon$ qui ne présente aucun intérêt; qu'il nous suffise de dire qu'on trouve $\delta\varepsilon = 0$.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE LIGNE FIXE.

§ I. — Généralités. — Questions diverses.

21. Une *ligne fixe* (déterminée, par exemple, par l'intersection des surfaces de deux corps solides) est censée, par sa rigidité, détruire toute force extérieure qui lui est normale.

Une pareille ligne influe donc sur le mouvement d'un point matériel m, qui est assujetti à la parcourir, comme si elle donnait lieu à une force normale N (*réaction de la courbe*) égale et contraire à la résultante des forces détruites. Le point m ne peut donc être considéré comme libre en le supposant sollicité par les forces extérieures et par la réaction N.

Soient

F la résultante des forces extérieures;
F_t sa composante tangentielle;
v la vitesse du mobile.

On a

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \tag{1}$$

équation qui, jointe à celles $f(x, y, z) = 0$, $f_1(x, y, z) = 0$ de la courbe, permettra de déterminer x, y, z en fonction du temps.

On a aussi

$$mv\,dv = F_t v\,dt = F_t\,ds,$$

d'où

$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = \int F_t\,ds = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \tag{2}$$

équation de la force vive qui aurait pu s'écrire immédiatement, mais qui ne peut être utile que lorsque son second membre peut s'intégrer ou lorsque F dérive d'un potentiel $\varphi(x, y, z)$, et alors

$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

S'il en est ainsi, la vitesse du mobile, lorsqu'il repasse par un même point de la ligne, redevient la même, au sens près.

L'équation (2) revient d'ailleurs à celle-ci

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \varphi(x, y, z) + \text{const.}$$

Supposons connue la loi du mouvement et proposons-nous de déterminer la réaction N.

1° Le *point se meut sur la concavité de la ligne.* — Soient

F_n la composante de F, suivant la normale extérieure de la courbe;

F_b sa composante, suivant la perpendiculaire au plan osculateur (*binormale*);

ρ le rayon de courbure;

N_n, N_b les composantes normale et binormale de N, la première étant dirigée vers le centre de courbure.

On a

$$F_b + N_b = 0, \qquad F_n + \frac{mv^2}{\rho} - N_n = 0,$$

d'où N_b, N_n et par suite N.

Dans le cas d'un potentiel, on a

$$N_n = F_n + \frac{1}{\rho}\left[2\varphi(x, y, z) + \text{const.}\right].$$

Si N_n devient nul, le mobile quittera la courbe à l'instant suivant, sauf à la rencontrer plus tard si cela se peut. Le *point d'échappement* est celui où le mobile quitte la courbe.

2° Le *point se meut sur la convexité.* — Dans ce cas, F_n est

dirigé vers le centre de courbure et N_n en sens inverse. On a

$$N_n = F_n - \frac{mv^2}{\rho}.$$

La distinction entre les deux cas n'est pas à établir quand la courbe est censée formée par un tuyau dont la section est très petite et dans lequel m est assujetti à circuler.

22. *Mouvement d'un point pesant sur une ligne fixe quelconque.* — Soit z la distance du mobile m à un plan horizontal fixe (P); on a

$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = my(z - z_0).$$

Si A_1, A_2 sont deux points de la courbe situés à la même distance de (P), m aura la même vitesse absolue en passant par ces deux points. En admettant que m parte du repos en A_1, il arrive en A_2 sans vitesse; il repartira de A_2 et reviendra sans vitesse en A_1 et ainsi de suite. Le point m décrira ainsi une série d'oscillations entre les positions limites A_1 et A_2.

plan

23. *Mouvement d'un point pesant sur un ~~point~~ incliné.* — Soient

i l'inclinaison du plan AB sur l'horizon;
A le point de départ de m ou sans vitesse initiale;
B le point d'arrivée à l'instant t.

Le poids mg se décompose en une force normale $mg \cos i$, détruite par le plan, et en une force $mg \sin i$ suivant le plan; il suit de là que le mouvement est uniformément accéléré et qu'on a successivement

$$\overline{AB} = g \sin i \frac{t^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2\overline{AB}}{g \sin i}} = \sqrt{\frac{2\overline{AC}}{g}},$$

C étant l'intersection de la verticale en A avec la perpendiculaire en B à AC; d'où ce théorème (Galilée) : *Toutes les*

cordes du cercle ayant AC *pour diamètre sont parcourues par m dans le même temps.*

Comme exercice, nous signalerons les problèmes de Saladini et de O. Bonnet, dont les solutions sont données aux nos 4 et 5 du tome VII.

24. *Mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical.* — Soient

O le centre et A le point le plus élevé du cercle;
R son rayon;
m_0A une courbe dans le plan du cercle, se raccordant en A avec la circonférence;
h la hauteur d'un point déterminé m_0 de cette courbe au-dessus de A.

Un point matériel pesant part de la position m_0 sans vitesse initiale, parcourt m_0A, se meut ensuite sur la circonférence; soit θ l'angle formé avec OA par le rayon mené à une position quelconque m du mobile sur la circonférence; on a, pour le carré de la vitesse en m,

$$v^2 = 2g[h + R(1 - \cos\theta)]$$

et, pour la réaction normale,

$$N = \frac{g}{R}[(3R\cos\theta - 2(h + R)].$$

L'échappement est déterminé par $N = 0$, ou par

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\frac{h + R}{R}.$$

Le maximum de θ correspond à $h = 0$ ou à $\theta = 47°45'$; mais, en se plaçant dans ce cas (où m serait en équilibre instable), il faudrait imprimer au mobile placé en A une vitesse aussi petite qu'on voudra.

L'angle θ sera nul pour $h = \frac{R}{2}$ et pour $h > \frac{R}{2}$ l'échappement aura toujours lieu en A.

25. *Des petites oscillations du pendule simple.* — Soient

l la longueur du pendule;
OA la verticale du point fixe O;
Om_0 la position initiale du pendule et θ_0 l'angle qu'elle forme avec OA;
Om une position quelconque du pendule;
θ l'angle qu'elle forme avec OA et qui est considéré comme positif ou négatif, selon qu'il est situé ou non du même côté de OA que θ_0.

On a

$$-ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\theta$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Si l'angle θ_0 est suffisamment petit, on peut prendre

$$\sin\theta_0 = \theta_0\left(1 - \frac{\theta_0^2}{6}\right)$$

et, *a fortiori,*

$$\sin\theta = \theta\left(1 - \frac{\theta_0^2}{6}\right).$$

Si $\theta_0 \leqq 20°$, on a

$$\frac{\theta_0^2}{6} \leqq 0{,}021,$$

et, dans ces conditions, on pourra supposer par approximation $\sin\theta = \theta$, et l'on verra plus loin que, par suite de l'intégration, l'erreur commise est moindre que la limite $\frac{\theta_0^2}{6}$ en ce qui concerne la durée d'une demi-oscillation.

On a donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

d'où, en exprimant que $\theta = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ pour $t = 0$,

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

sera la durée

le pour la pre-

de du mouve-

le pendule a

cycloïde à base

point égale à

le la droite di-

de la circonfé-

est

la Géométrie.

[illegible] composante ci-dessus [illegible]nt par exemple que le [illegible]n a

[illegible]ations du mouvement [illegible]c pour la durée d'une

[illegible]e la position du point [illegible]çu, relativement à la [illegible]

[illegible] cycloïde au sommet S; [illegible]n fil de longueur C_0S [illegible]*n*, le fil en s'enroulant [illegible] d'où un pendule par- [illegible] des deux guides tels [illegible]ormation s'ils sont en [illegible] manière satisfaisante [illegible]

[illegible]ylindre vertical quel- [illegible]angente sera la même [illegible]ndrique est donc aussi [illegible] tautochrones à double [illegible]

[illegible]*le dans le vide quelle* [illegible] trouvé au n° 25

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ce qui n'est autre chose que l'équation de la force vive qu'on aurait pu écrire immédiatement. On déduit de là

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \mp \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Comme dt est essentiellement positif, on devra prendre le signe — ou le signe + selon que θ décroîtra ou croîtra. En ne considérant que la première oscillation complète, on devra prendre le signe — et en désignant par τ la durée de la demi-oscillation descendante, on aura

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Comme $\theta \leqq \theta_0$, on peut poser $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi$ et alors on a

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}},$$

et τ s'exprime ainsi au moyen d'une intégrale elliptique de première espèce.

En développant en série on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6.2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\sin^{2n}\varphi + \ldots.$$

Si donc on pose

$$u_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi,$$

il vient

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau = u_0 + \frac{1}{2}u_1\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}u_{2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2} \quad (^1),\\
u_{2n-2} &= \frac{2n-3}{2n-2} u_{2n-4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_4 &= \frac{3}{4} u_2,\\
u_2 &= \frac{1}{2} u_0,\\
u_0 &= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

d'où, en multipliant membre à membre ces relations,

$$u_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2};$$

par suite

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots \left[\frac{1.4.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 \sin^{2n}\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right\}.$$

Si θ_0 est assez petit pour qu'on puisse prendre $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$, on a, en s'arrêtant au second terme de la série,

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

---

(1) On a, en effet, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\varphi\, d\cos\varphi\\
&= -\left(\cos\varphi \sin^{2n-1}\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi\\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\,(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi = (2n-1)\,u_{2n-1} - (2n-1)\,u_{2n},
\end{aligned}$$

d'où u_{2n} au moyen de u_{2n-2}.

28. *Mouvement du pendule simple dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la distance.* — Si nous nous reportons au n° 25 et si nous désignons par $m\gamma l\frac{d\theta^2}{dt^2}$ la résistance, nous avons

$$-l\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\sin\theta - \gamma l\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

ou, en posant $\frac{g}{l} = \mu^2$,

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu^2\sin\theta + \gamma\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Si l'on pose $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, et si l'on remarque que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\theta},$$

il vient

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} - 2\gamma\omega^2 + 2\mu^2\sin\theta = 0,$$

d'où, en exprimant que $\omega = 0$ pour $\theta = 0$,

$$\omega^2 \text{ ou } \frac{d\theta^2}{dt^2} = -2\mu^2 e^{2\gamma\theta}\int_{\theta_0}^{\theta} e^{-2\gamma\theta}\sin\theta\, d\theta.$$

L'intégration peut s'effectuer en employant la méthode par parties, et t s'obtiendra ensuite en fonction de θ par une quadrature.

Considérons le cas où les amplitudes sont assez petites pour qu'on puisse négliger θ^3 et $\frac{d\theta^3}{dt^3}$ devant l'unité; l'équation (1) se réduit à

$$(1') \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu^2\theta + \gamma\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

En négligeant la résistance, censée petite, on aurait

$$\theta = \theta_0\cos kt;$$

en portant cette valeur dans le terme en γ, on obtient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu^2\theta + \mu^2\frac{\theta_0^2\gamma}{2}(1 - \cos 2\mu t),$$

d'où, en désignant par M, N deux constantes,

$$\theta = \frac{\theta_0^2\gamma}{2} + \frac{\theta_0^2\gamma}{6}\cos 2\mu t + M\cos\mu t + N\sin\mu t.$$

Si l'on exprime que $\theta = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ pour $t = 0$, on obtient

$$(2)\qquad \theta = \left(\theta_0 - \frac{2}{3}\theta_0^2\gamma\right)\cos\mu t + \frac{\theta_0^2\gamma}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\mu t\right),$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{d\theta}{dt} = -\mu\left(\theta_0 - \frac{2}{3}\theta_0^2\gamma\right)\sin\mu t - \frac{\theta_0^2\gamma\mu}{3}\sin 2\mu t.$$

Soit τ la durée de la demi-oscillation descendante ou la valeur de t pour $\theta = 0$, on a

$$\cos\mu\tau = -\frac{\theta_0\gamma}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\mu\tau\right).$$

En négligeant $\gamma\theta_0$, on a $\mu\tau = \frac{\pi}{2}$; en portant cette valeur dans le terme en γ, on trouve

$$\cos\mu\tau = -\frac{\theta_0\gamma}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0\gamma}{3}\right),$$

d'où

$$\tau = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0\gamma}{3}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0\gamma}{3}\right).$$

On voit ainsi que la résistance du milieu augmente la durée de la demi-oscillation descendante. La première valeur T de t qui, après θ, annule $\frac{d\theta}{dt}$ est $T = \frac{\pi}{\mu} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. La résistance n'influant pas sur la durée de l'oscillation complète, il faut que la durée de la demi-oscillation ascendante ait diminué, ce qui s'explique par la diminution de l'angle d'écart de cette demi-oscillation. On a en effet, pour $\mu t = \pi$,

$$\theta = -\theta_0 + \frac{4}{3}\theta_0^2\gamma,$$

ou, en appelant θ_1 la valeur absolue de la demi-amplitude

ascendante,

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{4}{3}\theta_0^2\gamma.$$

Pour la demi-oscillation ascendante suivante on aurait de même

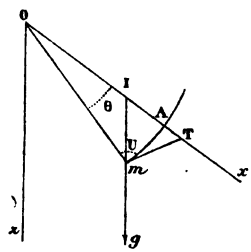
$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{4}{3}\theta_1^2\gamma,$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que les oscillations s'annulent.

On remarquera que la diminution d'une oscillation complète est $\frac{8}{3}\theta_0\gamma$, ce qui est conforme au résultat obtenu au n° 20 dans le cas où l'ellipse se réduit à une droite.

29. *Mouvement relatif d'un point pesant sur une ligne* A*m comprise dans un plan vertical qui tourne d'un mouvement angulaire uniforme* ω *autour d'un point* O. — Soient (*fig.* 20)

Fig. 20.



Oz la verticale du point O;
et à l'instant t,
OAx la position d'un axe fixe dans le plan de la courbe;
T l'intersection de la tangente à la position m du mobile avec Ox;
$\theta = \widehat{mOx}$, $r = \overline{Om}$, $U = \widehat{OmT}$, $s = \text{arc}\,Am$;
I l'intersection de la verticale de m avec Ox.

On a

$$\widehat{zOx} = \omega t + \gamma,$$

en désignant par γ la valeur initiale de cet angle; puis,

$$\widehat{ImT} = U - \widehat{OmI} = U - \widehat{zOm} = U - (\omega t + \gamma - \theta),$$

et pour la composante tangentielle de g,

$$g\cos(U - \omega t - \gamma + \theta).$$

La composante semblable de la force centrifuge est

$$\omega^2 r \cos U,$$

et, comme la composante tangentielle de la force d'inertie dans le mouvement relatif est $-\frac{d^2 s}{dt}$, on a

$$(1) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = g\cos(U - \omega t - \gamma + \theta) + \omega^2 r \cos U.$$

Au moyen de l'équation $f(r, \theta) = 0$ de la courbe, on exprimera $\operatorname{tang} U = \frac{r\,d\theta}{dr}$, par suite $\cos U$, $\sin U$ en fonction de r ou de θ, et de la même manière ds.

L'intégration de l'équation (1) ne paraît pouvoir s'effectuer que dans le cas de $U + \theta = \widehat{mTx} = \text{const.}$, c'est-à-dire dans le cas d'une droite. Admettons pour simplifier que Ox soit perpendiculaire à la droite; on a

$$U + \theta = 90^\circ, \qquad r = \frac{s}{\sin\theta},$$

et, en posant

$$-\frac{\pi}{2} + \gamma = \varepsilon,$$

il vient

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t + \varepsilon) + \omega^2 s,$$

équation dont l'intégrale est

$$s = -\frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t + \varepsilon) + Me^{\omega t} + Ne^{-\omega t},$$

M, N étant deux constantes qu'on déterminera par les conditions $s = s_0$, $\frac{ds}{dt} = V_0$ pour $t = 0$.

est dite *tau-*
écrire, sous
atiel, arrive
ligne, quel
lle.
pour la solu-
le potentiel
nt matériel
a résistance

pace réunis
à une force
décrire. Le
ntra plus ou
forme pour
la *brachis-*
nnée.
de la pesan-
ernoulli qui
s analogues
plaçant au
'II (Chap. II,
e calcul des

rone repose

ux points A,
iaires quel-

la brachisto-
ab ou *acb*, il
*b*B sera la
que la durée

[illegible] ite que celle de AabB, [illegible] lise.

[illegible] *t brachistochrone pour* [illegible]

[illegible] *t de la brachistochrone* [illegible] *ssant par ce point;* par [illegible] *dans ce plan.*

[illegible] de la brachistochrone; [illegible] niveau passant par un [illegible] e plan mené par cette [illegible] surface infiniment voi- [illegible] PQ.

[illegible] au plan de PQ l'est par [illegible] ba_1.

[illegible] tesse V, aux infiniment [illegible] a la même vitesse V_1 en [illegible] aura par suite

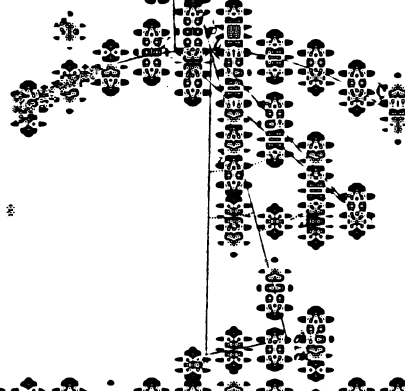
$$\frac{ba_1}{V_1},$$

[illegible] ab' avec la surface de niveau, [illegible] ve, serait la même qu'en I si m [illegible] b' est de l'ordre de la dis-

[illegible] ir aba_1 est [illegible] $'a_1$. Ce qui [illegible]

[illegible] ne quand : [illegible] n point fixe [illegible]

[illegible] *force exté-* [illegible] *force cen-* [illegible]



[illegible] ochrone; [illegible] a force exté- [illegible]

[illegible] imum, il faut [illegible] obtienne un [illegible]

$\frac{1}{\rho}$

$\overline{bb'}\sin i_1$;

[illegible]

[illegible] nce de la courbe, on [illegible] par $ds = V\,dt$,

[illegible] i

[illegible]

[illegible] tielle de F, par suite [illegible] t le théorème se trouve

[illegible] $\frac{di}{dt}$. Donc, *au point de* [illegible] *dirigé suivant ds ou la* [illegible] *iveau mené en ce point.*

[illegible] *stochrones.* — Soient [illegible] départ A;

[illegible] posantes de F parallèles

des angles

les cosinus

avec Ox,

gentielle de

osculateur et

ge, on a

stinctes; car,

spectivement

$\alpha + \ldots = F_t$.

$\cos\alpha$

[illegible]

$$[illegible] = \frac{d\,\frac{\cos\alpha}{V}}{ds},$$

[illegible]

$$\left\{\begin{array}{l} [illegible] = 0, \qquad \text{et de même} \\ [illegible] = 0, \\ [illegible] = 0, \end{array}\right.$$

[illegible] de ces équations sont [illegible] ndante, les deux der- [illegible]

$$[illegible] \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\,\frac{\partial \frac{1}{V}}{\partial y},$$

$$[illegible] \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\,\frac{\partial \frac{1}{V}}{\partial z}.$$

[illegible] de (1), on aura deux [illegible] dre entre les fonctions [illegible] introduira quatre con- [illegible], N par les conditions [illegible]

$$[illegible] = \Psi(x, M, N)$$

[illegible]

$$[illegible] \sqrt{[illegible]}\, dx = \Psi(x, M, N).$$

Supposons que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point d'arrivée A_1 soient données; les constantes M, N seront déterminées au moyen des équations (5), et l'équation (6) fera connaître la durée du parcours t_1.

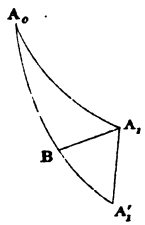
Admettons maintenant qu'on se donne seulement la durée t_1 du parcours; en éliminant M, N entre les équations

$$y_1 = f(x_1, M, N), \qquad z_1 = f_1(x_1, M, N,), \qquad t_1 = \Psi(x_1, M, N),$$

on en obtiendra une autre de la forme $\Phi(x_1, y_1, z_1, t_1)$, qui représentera une surface dite *synchrone*. Tout arc de brachistochrone issu du point de départ est un arc *isochrone*.

34. *Une surface synchrone est normale aux arcs isochrones.* — Soient (*fig.* 23) A_0A_1, $A_0A'_1$ deux arcs synchrones infiniment voisins; V_1 la vitesse en A_1, égale, à un infiniment petit près à la vitesse en A'_1.

Fig. 23.



Supposons que l'angle A'_1 soit aigu; menons dans le plan tangent en A_1 l'élément A_1B limité en B à $A_0A'_1$, faisant avec $A_1A'_1$ un angle égal à l'angle A'_1. La vitesse en B, à un infiniment petit près, est égale à V_1; le temps employé pour aller de A_0 à A_1, en suivant le chemin A_0BA_1, est, par hypothèse, supérieur à t_1, et, en désignant par t' le temps employé pour aller de A_0 à B, on a

$$t' + \frac{\overline{BA_1}}{V_1} > t_1.$$

Mais, pour aller de A_0 en A'_1, le temps employé est

$$t_1 = t' + \frac{\overline{BA'_1}}{V_1},$$

[illegible] est absurde, puisque, [illegible] soscèle. Il faut donc [illegible] le théorème.

[illegible] *pesanteur* (courbe de [illegible]

[illegible] au point [illegible], y) sur A_0x.

[illegible] il faut prendre [illegible] $= -2gy\frac{d\alpha}{ds}$. En éga- [illegible] normale $g\cos\alpha$ de la [illegible] on obtient

[illegible]

[illegible] est un point de re- [illegible] ase. [illegible] gne de plus vite des- [illegible] A_1 du point d'arrivée [illegible]

[illegible] que l'on a tracée;

[illegible] en A_1 à a_1b.

[illegible] chistochrone, attendu [illegible] t de rebroussement A_0 [illegible] ne dépend que d'une [illegible] au rayon de la circon- [illegible]

[illegible] *centrale* $\mu^2 r$ [illegible] *à la distance* [illegible] 24) l'axe Ox [illegible]

[illegible] hrone (théo-[illegible] x.

[illegible] quand s aug-[illegible] $ds = -\frac{dr}{\sin\alpha}$:

[illegible] $\frac{d\theta}{dr}$, on obtient

arbitraire,

s-normale polaire,

$$\frac{r_0^2 C^2}{+ C^2}\Big),$$

térieure.

tion autour de Ox.

FACE FIXE.

nouvoir sur
té, détruit
gidité de la
ffet qu'une
étruite.
bile comme
des forces
la grandeur
ale à l'unité.

male de la

[illegible] ure de la trajectoire, θ

[illegible] e courbure géodésique

[illegible] ce extérieure P suivant

[illegible] e la surface, la normale

[illegible] composantes

[illegible] vant mq

[illegible] ant mN,

[illegible] $$P_N + N + \frac{V^2}{R} = 0.$$

[illegible] ésique P_q de P est égale

[illegible] que la réaction N est

[illegible] an osculateur de la tra-

[illegible] ce.

[illegible] surface ou est nul, on a

$$\theta = 0,$$

[illegible] *ésique,* puisque son plan

[illegible] – Soient

[illegible] urface;

[illegible] $$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

[illegible] $$\cos m = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

[illegible] us des angles de la nor-

[illegible] Oy, Oz;

[illegible] a son inté-

[illegible] u temps et [illegible] le donnera [illegible] fera con- [illegible] connaître

[illegible] ctoire avec [illegible] le avec Ox, [illegible] ésique avec

$$\cos\alpha = \ldots,$$

$$\cos\beta = \ldots,$$

$$\cos\gamma = \ldots,$$

$$\cos\alpha' + \ldots = 0,$$

$$\ldots + \ldots).$$

$$\ldots + \ldots).$$

[illegible]

$$\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = V\frac{dV}{d\sigma}\cos\alpha,$$

[illegible] considéré comme libre

$$[illegible] X + N\cos l,$$

$$[illegible] + N\cos m,$$

$$[illegible] Z + N\cos n.$$

[illegible] ées respectivement par [illegible]

$$[illegible] = P_N + N$$

$$[illegible] P_N + N$$

$$[illegible] N$$

[illegible]

[illegible] s (1).

[illegible] pliées par $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, [illegible] valeur (2), on obtient [illegible]

$$[illegible] = X\cos\alpha' + \ldots,$$

[illegible] vue de la simplicité du [illegible] N entre deux des équa-

[illegible] ement, mais il présente [illegible] ntables d'intégration.

[illegible] ale à la surface, l'équa-

uation des
, on devra
$= n$. Nous
la théorie

un pendule
eur. Si l'on

mprise dans

a un instant

n du théorème
(n° 19), d'une
son application

[illegible] lant comprise dans un [illegible] succession de maxima [illegible] e de m sera évidem- [illegible] Nous supposerons que [illegible] ns par V_0 la vitesse en [illegible] lettres qui se rappor- [illegible] dule.

[illegible] composant des déplacements [illegible] le principe de la force

[illegible] $(\cos\theta - \cos\theta_0)$.

[illegible] $= \omega^2$,

[illegible]

[illegible] $\cos\theta_0 + \omega^2)$.

[illegible] ction de la pesanteur et [illegible] le moment de la quan- [illegible] rapport à A_1 est constant, et

[illegible] $\sin\theta_0$,

[illegible]

[illegible] $\cos\theta_0$.

[illegible] marquant que

[illegible] $\cos\theta_0 + \cos\theta)$,

[illegible]

$$[illegible] + \omega^2 \cos\theta_0 - 1),$$

[illegible] θ décroîtra

[illegible] le radical

[illegible]

[illegible]é, car pour

[illegible]

[illegible] donner un

[illegible]nde racine,

$$[illegible] - 1,$$

[illegible]

$$[illegible] \left(\frac{1 + \cos\theta_0 \cos\theta_1}{\cos\theta_0 + \cos\theta_1}\right),$$

[illegible]ur (e) de ω,

[illegible]

[illegible]u'au cas de

[illegible]sse négliger

[illegible] détails, au

[illegible] $= \theta\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)$,

[illegible] $\frac{\theta^2 + \theta_0^2}{12}\Big)$,

[illegible] $\frac{\theta^2 + \theta_1^2}{12}\Big)$,

[illegible] $\left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right)$,

[illegible] $\frac{1}{24}(\theta_0^2 + \theta_1^2)\Big]$,

[illegible] $\theta^2)$,

[illegible] $- \theta_1^2)$,

[illegible] $5\theta^2$ [illegible] $\Big)\, d\theta$

[illegible] $\theta^2\, d\theta^2$ [illegible] $48\mu\Delta$,

[illegible] $= \mp\, \theta_0\theta_1\left(\frac{d\theta^2}{2\theta^2\Delta} + \frac{3}{16}\frac{d\theta^2}{\Delta}\right)$.

[illegible] roît à partir de zéro, et [illegible] posons

[illegible] $= \theta_0$ pour $\psi = n\pi$,

[illegible] $= \theta_1$ » $\psi = (n + \frac{1}{2})\pi$,

[illegible]

[illegible] ls se rapportent respec- [illegible] t.

[illegible]

[illegible] $\cos^2\psi + \theta_1^2 \sin^2\psi)\, d\psi$

[illegible] $- \theta_1^2)\cos 2\psi\, d\psi$,

[illegible] θ_0 de θ,

[illegible] ψ.

[illegible] et $\psi = n\pi$,
[illegible] du passage
[illegible] *e versa*, est

[illegible] du pendule

[illegible]

[illegible] s'annule pour
[illegible] et est alors
[illegible] second terme
[illegible] et l'on aura,

[illegible] $\sqrt{\frac{\theta_0^2 - \theta^2}{\theta^2 - \theta_1^2}}$,

[illegible] $ds^2\varphi'$.

[illegible] le rayon A_1m_1, cette for-

[illegible] $ds^2\varphi'$,

[illegible] son centre A_1, et dont φ

[illegible] un axe mobile autour

[illegible] ϱ_1, dont le sens est celui

[illegible] $\varphi' = \widehat{xA_1m_1}$, et A_1x est

[illegible]. Donc :

[illegible] crit une ellipse qui tourne

[illegible] angulaire

[illegible] O_0O_1,

[illegible] re.

[illegible] faut quand l'angle θ est

[illegible] la force vive et des aires,

[illegible] réduisent toutes deux à

[illegible] exceptionnel, est immé-

[illegible] laire constante du plan

[illegible] A. Comme la résultante

[illegible] I doit être détruite par

[illegible] $\omega^2 = \frac{g}{OI}$ (1).

[illegible] lution des questions suivantes :

[illegible] vement d'un point sur une sur-

uvement du

es du pen-

e grand axe

buer qu'à la

d'une révo-

a résistance

ont devenus

axe est rela-

le calcul de

20, où l'on

on du grand

ent à la fin

et ainsi de

ur le mouve-

ges de Phy-

es faites par

ont été répé-

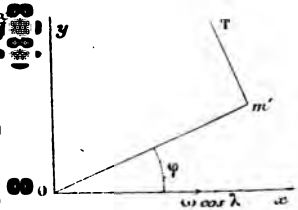
ur;

vitesse d'en-

e pour qu'on

[illegible] portent au point de départ,

[illegible]



$$2g(z - z_0)$$

$$- \frac{1}{2^3} \frac{r^4}{l^4} - \ldots \Big).$$

[illegible] négligeable, et il vient, par

$$- \mu^2 dr^2,$$

[illegible] $\sin\lambda = n$ suivant Oz, et

[illegible]

[illegible] tie, n° 62),
[illegible] ge compo-

[illegible] $-2m\frac{dy}{dt}$.

[illegible] tte accélé-

[illegible] $+m\frac{dz}{dt}\cos\varphi\Big]$.

[illegible] tesse rela-
[illegible], en ayant

[illegible]

[illegible] $\frac{d\theta}{dt}$,

[illegible]

[illegible] vant μ^2; le
[illegible] e mn ou de

[illegible] duit donc à celle-ci

[illegible] $u^2\,dr^2$.

[illegible] ond membre de l'équa-
[illegible] on degré en r est plus
[illegible] ier membre; pour ce
[illegible] ans une première ap-
[illegible] our $t = 0$, on a

[illegible] $= n$,

[illegible] tion

[illegible] que $\frac{dr}{dt} = 0$ pour $t = 0$,
[illegible]

[illegible] $- r_0^2$).

[illegible] axe mobile Ox', coïnci-
[illegible] imé de la rotation n de

[illegible]

[illegible] es d'un point libre sou-
[illegible] t la vitesse initiale nr_0
[illegible] décrit une ellipse dont
[illegible] our du centre O avec la
[illegible] a droite.
[illegible] t s'effectuer complète-
[illegible] le résistance, sa durée

[illegible] λ,

[illegible] ce du Pan-
[illegible] observation,
[illegible] le passait et
[illegible] pension.

[illegible] ns le second
[illegible] force pertur-
[illegible] supposerons
[illegible] s (1) de ce
[illegible] ou r_0^2,
[illegible] dr.

[illegible] ar-suite, que
[illegible] ation (c) du
[illegible]

[illegible] on peut né-
[illegible] $\varphi_0)\,d\theta$,
[illegible]

[illegible] égaux deux à deux

[illegible] 9 donne

[illegible] $\varphi_0 + \sin^3\theta \sin\varphi_0)\, d\theta$,

[illegible] a pour effet que de [illegible] ptique dans une révo- [illegible] ervation.

8. — [illegible]

[illegible] maintenues [illegible] es ou répul- [illegible] bservation a [illegible] points ma- [illegible] $m'\varphi(r)$, dans [illegible] nce r de ces [illegible] masses de ses [illegible] les dimen- [illegible] celles de ses [illegible] ns son inté- [illegible] axes coor- [illegible] allélépipède [illegible] quoique ses [illegible] en négliger [illegible] ne des diffé- [illegible] en éléments [illegible] int (x, y, z), [illegible] $dx\,dy\,dz$. Selon [illegible] tre, le corps

[illegible] le volume d'un corps [illegible] densité de ce corps est [illegible]

[illegible] actions exercées par [illegible] l'une d'entre elles m. [illegible] qu'elle décroît [illegible] augmente. On peut, par [illegible] pour des valeurs de la [illegible] qui est elle-même très [illegible] réduiront donc à celles [illegible] dans la sphère dite *d'action*.

[illegible] *d'un système matériel.*

[illegible] système, d'un plan PP' [illegible] (A), (A'); m, m' deux [illegible] choisies de manière que [illegible] dans l'intérieur du [illegible] tions $mm'\varphi(r)$ des m' [illegible] à elles-mêmes en un [illegible] p étant une quantité [illegible] par la pensée, sup- [illegible] par la force $p\,d\omega$.

[illegible] ns (A), cette force est [illegible] *ession* proprement dite. [illegible] *raction* ou si l'on veut [illegible]

[illegible] se décompose en compo- [illegible] conde composante est [illegible] que le frottement quand [illegible] de deux corps solides [illegible] ble dans les fluides en [illegible] s ferons abstraction du [illegible] vient à supposer que la [illegible]

— Soient

nels on rap-

;

quations

$Mz_1 = \Sigma mz.$

es axes O_1X,

coordonnées

, c.

$Z_1 = \Sigma mZ.$

nt un point

es que soient

int G, défini

l'orientation

fictive appli-

résultante de

Σmz

e MR est in-

C'est ce que

ou son *centre*

ultérieure-

de la masse

r rapport à

e serait con-

mentaires.

[illegible] *dans un même plan*
[illegible] *est de même de* G;
[illegible], *la somme des mo-*
[illegible] et réciproquement;
[illegible] *ux et symétriques par*
[illegible] *e trouve dans le plan;*
[illegible] *ux et symétriquement*
[illegible] *re de gravité se trouve*

[illegible] *semblables.* — Soient
[illegible] éométriquement sem-
[illegible] ntre de similitude O;
[illegible] le similitude. Suppo-
[illegible] telles que μ, m soient
[illegible] nt par χ, η, ζ les coor-
[illegible] z; χ_1, η_1, ζ_1 celles du
[illegible] par exemple,

$$\alpha\beta\Sigma mx = Mx_1;$$

[illegible] de $\Sigma\mu$, Σm sont deux
[illegible]

[illegible] *t on connaît les centres*
[illegible] *esquelles* M *peut se dé-*
[illegible] rdonnées parallèles à
[illegible]. On a évidemment

[illegible]

[illegible] tent comme des points
[illegible] on en leurs centres de

[illegible] *eux masses* μ, μ'. —
[illegible] μ'; (P) le plan per-
[illegible] a, en prenant les mo-

[illegible] en leurs cen-
[illegible] tations autour

[illegible] *de masses.* —
[illegible] μ', μ'', ... On
[illegible] gravité γ_1 où la
[illegible] vec μ'', et ainsi

[illegible] t par un point
[illegible] G de la masse

[illegible] x axes $G\chi$, $G\eta$,

$$[illegible] = Mx_1^2 + \Sigma m\chi^2,$$
$$[illegible] = My_1^2 + \Sigma m\eta^2,$$
$$[illegible] = Mz_1^2 + \Sigma m\zeta^2;$$

[illegible]

[illegible] $= \Sigma m\rho^2$ quand O
[illegible] c Ox, Oy, Oz.
[illegible]

$$[illegible] = \Sigma mr\cos\gamma,$$

on obtient

$$\begin{aligned} M^2 r_1^2 &= \Sigma m^2 r^2 + 2\Sigma mm' rr'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') \\ &= \Sigma m^2 r^2 + \Sigma mm' rr' \cos(r, r'). \end{aligned}$$

Or

$$\overline{mm'}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(r, r'),$$

par suite

$$\begin{aligned} M^2 r_1^2 &= \Sigma m^2 r^2 + \Sigma mm'\left(r^2 + r'^2 - \overline{mm'}^2\right) \\ &= (m + m' + \ldots) mr^2 + (m' + m + \ldots) m' r'^2 + \ldots - \Sigma mm' \times \overline{mm'}^2 \end{aligned}$$

ou

$$M r_1^2 = M\Sigma mr^2 - \Sigma mm' \times \overline{mm'}^2,$$

ce qui constitue le théorème dont il s'agit.

Centres de gravité des solides homogènes. — Soient V, ρ le volume et la densité d'un solide; on a

$$M = V\rho, \qquad m = \rho\, dx\, dy\, dz,$$

par suite

$$V x_1 = \int\int\int x\, dx\, dy\, dz.$$

On est ainsi ramené à considérer les *centres de gravité des volumes.*

Soient ω un profil circulaire infiniment petit qui se meut normalement à une ligne que décrit son centre; s l'arc de la ligne compris dans le volume engendré par ω. On a

$$s.\omega x_1 = \int \omega x\, ds,$$

d'où

$$s x_1 = \int x\, ds.$$

On est ainsi conduit à considérer le *centre de gravité d'une ligne.*

Considérons un solide limité par deux surfaces parallèles infiniment voisines, distantes de ε; σ l'étendue de l'une d'elles; on a

$$\varepsilon\sigma x_1 = \int \varepsilon\, d\sigma x \qquad \text{ou} \qquad \sigma x_1 = \int x\, d\sigma,$$

d'où la considération du centre de gravité d'une surface.

La détermination des centres de gravité des figures géométriques rentrant dans les programmes de Mécanique élémen-

[illegible] e quelconque
[illegible] ns pas à nous

[illegible] solide est en-
[illegible] eut normale-
[illegible] points M est
[illegible] fixe dans le
[illegible] c le rayon de

[illegible] x points infi-
[illegible] de courbure;

[illegible] à M, M′ d'un
[illegible] élément de
[illegible] ite Cz et dont

[illegible] venant en $m'n'$
[illegible] $\overline{mc}\, d\theta$, d'où
[illegible] étant le péri-
[illegible] Cz. Mais $r\, d\theta$
[illegible] dessus; donc,
[illegible] ce engendrée

[illegible] l'élément de
[illegible] $\theta\Omega r_1$, en dési-
[illegible] é de Ω à Cz;
[illegible] re, le volume
[illegible] era

[illegible] n à $\sigma = 2\pi r$,

[illegible] ard (vers 1600)

[illegible] il coupait Cz, les for-
[illegible] rences entre les surfaces
[illegible] l'autre.

[illegible] ient r la distance à un
[illegible] olide dont la masse est
[illegible] tie du solide par rapport

[illegible]

[illegible] *gyration* relatif à Oz.

[illegible] *ertie par rapport à deux*

[illegible] econd passe par le centre

[illegible] ivant laquelle on dirige

[illegible] ;

[illegible] moments d'inertie par

[illegible] $\Delta\overline{GJ}$,

[illegible] asses m' et remarquant

[illegible] ndra, par suite, le mo-
[illegible] parallèle à Oz.
[illegible] um de I pour une direc-

lconque OK

$2m(x^2+y^2)$

s;

OK.

$\cos\gamma)^2$,

$xy\cos\alpha\cos\beta$

$\cos\gamma\cos\alpha$,

nsx.

$\frac{A+B-C}{2}$,

$=2\cos^2\gamma$,

$\cos\beta$

$\cos\gamma\cos\alpha$.

de l'axe OK

$\sqrt{1}$.

et l'équation (3) devient la suivante

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2H_{xy}XY - 2H_{yz}YZ - 2H_{zx}ZX = 0,$$

qui représente un ellipsoïde dit d'*inertie*, et dont les axes ont reçu le nom d'*axes principaux d'inertie*.

Pour que Oz, par exemple, soit un axe principal d'inertie, il faut que $H_{yz} = 0$, $H_{zx} = 0$.

L'ellipsoïde étant rapporté à ses axes principaux, on a

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$

ou

$$I = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma,$$
$$I = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta.$$

Soient $A > B > C$, on voit que $I < A > C$. Donc I *est compris entre le plus grand et le plus petit des moments d'inertie principaux*.

On rémarquera que

$$A = B + C - 2\Sigma mx^2 < B + C.$$

Donc *le plus grand moment principal est plus petit que la somme des deux autres*, ce qui est une propriété caractéristique de l'ellipsoïde d'inertie.

III. *Un axe principal d'inertie* Gz *relatif au centre de gravité est principal en un point quelconque* O *de sa direction*. — Soient $\overline{OG} = \Delta$; Ox', Oy' les parallèles à Gx, Gy menées par le point O.

On a, par hypothèse,

$$\Sigma mxz = 0, \qquad \Sigma myz = 0.$$

Or

$$z = z' + \Delta, \qquad x = x',$$

par suite

$$0 = \Sigma mx'(z' + \Delta) = \Sigma mx' + \Delta\Sigma mx'z' = \Delta\Sigma mx'z'$$

et de même $\Sigma my'z' = 0$, et c'est ce qu'il fallait établir.

IV. *Déterminer les points* O *pour lesquels tous les moments d'inertie sont égaux*. — L'ellipsoïde d'inertie pour chaque point O se réduit à une sphère.

Soient

Gx, Gy, Gz les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité G;
A, B, C les moments d'inertie correspondants;
Ox', Oy', Oz' les parallèles en O aux axes Gx, Gy, Gz;
χ, η, ζ les coordonnées de O par rapport à ces axes.

Les moments d'inertie par rapport à Ox', Oy', Oz' devant être égaux, on a

$$(4) \qquad A + M(\eta^2 + \zeta^2) = B + M(\zeta^2 + \chi^2) = C + M(\chi^2 + \eta^2).$$

De

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma mxy = \Sigma myz = \Sigma mzx, \\ 0 &= \Sigma mx'y' = \Sigma my'z' = \Sigma mz'x', \\ 0 &= \Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz, \end{aligned}$$

$$x' = x - \chi, \qquad y' = y - \eta, \qquad z' = z - \zeta,$$

on déduit

$$0 = \Sigma mx'y' = \Sigma m(x - \chi)(y - \eta) = M\chi\eta$$

et de même

$$0 = M\eta\zeta, \qquad 0 = M\zeta\chi.$$

Il faut donc que deux des coordonnées χ, η, ζ soient nulles. Soient

$$\eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

les équations (4) deviennent

$$A = B + M\chi^2 = C + M\chi^2;$$

d'où

$$C = B \qquad \text{et} \qquad \chi = \pm\sqrt{\frac{A - B}{M}}.$$

Il faut donc que les deux plus petits moments d'inertie relatifs à G soient égaux, et alors il y a, sur le troisième axe principal d'inertie du centre de gravité G, deux points O symétriques par rapport à ce centre.

V. *Déterminer la position des axes principaux et la valeur des moments d'inertie correspondants pour un point donné* O *lorsqu'on connaît les moments d'inertie* Ma^2, Mb^2, Mc^2, *rela-*

passant par le centre

à Gx, Gy, Gz;

en G et G, faisant les

Oν.

$+ \zeta \cos\gamma)^2$

$+ \Delta^2$

$)^2$,

$\cos^2\beta$

$+ \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)^2$.

principal est

d

$+ (c^2 + \Delta^2) \cos\gamma \, d\cos\gamma$

$\alpha + \eta \, d\cos\beta + \zeta \, d\cos\gamma) = 0.$

uit l'équation

$\cos\gamma \, d\cos\gamma = 0.$

pliée par le coefficient

alant à zéro les coeffi-

nous obtenons

$\eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma),$

$\eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma),$

$\eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma).$

ectivement multipliées

rd à la formule (5), on

Si donc on remplace l'inconnue ρ^2 par

$$\lambda = \rho^2 - \Delta^2, \tag{7}$$

les équations (6) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \chi\,\frac{\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma}{a^2-\lambda}, \\ \cos\beta &= \eta\,\frac{\chi\cos\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots}{b^2-\lambda}, \\ \cos\gamma &= \zeta\,\frac{\chi\cos\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots}{c^2-\lambda}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

En ajoutant les équations (8), respectivement multipliées par $\cos\chi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, et supprimant le facteur

$$(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma),$$

on obtient

$$\frac{\chi^2}{a^2-\lambda} + \frac{\eta^2}{b^2-\lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2-\lambda} = 1 \tag{9}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} &\chi^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda) + \eta^2(c^2-\lambda)(a^2-\lambda) \\ &\quad + \zeta^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda) - (a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda) = 0 \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

ou encore

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda^3 + [\Delta^2 - (a^2+b^2+c^2)]\lambda^2 \\ &\quad + [a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - (b^2+c^2)\chi^2 - (c^2+b^2)\eta^2 - (a^2+b^2)\zeta^2]\lambda \\ &\qquad + b^2c^2\chi^2 + c^2a^2\eta^2 + a^2b^2\zeta^2 - a^2b^2c^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{9''}$$

Supposons

$$a^2 > b^2 > c^2.$$

Pour

$\lambda = -\infty$, le premier membre de l'équation (9') prend le signe $-$,
$\lambda = c^2$, » » $+$,
$\lambda = b^2$, » » $-$,
$\lambda = a^2$, » » $+$.

Si donc $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sont les racines de l'équation (9'), on a

$$\lambda_1 < c^2, \qquad \lambda_2 \begin{matrix} > c^2 \\ < b^2 \end{matrix}, \qquad \lambda_3 \begin{matrix} > b^2 \\ < a^2 \end{matrix}, \tag{10}$$

[illegible] $b^2 + c^2$

[illegible] $c^2 + 2\Delta^2$.

[illegible] ont les paramètres des [illegible] passant par le point O,

[illegible] ellipsoïde),

[illegible] yperboloïde à une nappe),

[illegible] yperboloïde à deux nappes).

[illegible] ainsi

$$[illegible] = \frac{\cos\gamma}{\dfrac{\zeta}{c^2 - \lambda}},$$

[illegible] *relatifs au point* O *sont* [illegible] *ar les équations* (12) et, [illegible] les surfaces. Ainsi l'axe [illegible] surfaces (λ_2), (λ_3).

[illegible] *eux des moments prin-* [illegible] avons deux cas à dis-

[illegible] *au moment moyen.* —

[illegible]

[illegible] $\lambda_2 = c^2 + \varepsilon_2^2$, les ε étant

Les deux premières des équations (12) donnent

$$\frac{x^2}{a^2-c^2+\varepsilon_1^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2+\varepsilon_1^2}+\frac{z^2}{\varepsilon_1^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-c^2+\varepsilon_2^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2-\varepsilon_2^2}-\frac{z^2}{\varepsilon_2^2}=1,$$

et représentent deux surfaces infiniment aplaties; à la limite elles se réduisent à

$$(13)\qquad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \quad \text{(ellipse)},$$

$$z=0,$$

et l'on a, par suite,

$$\zeta=0.$$

La relation (7) donne

$$\rho_1^2+\rho_2^2=2c^2+2(\chi^2+\eta^2),$$

d'où, en vertu de l'équation (11),

$$\rho_3^2=a^2+b^2-c^2.$$

Il suit de là que l'axe principal répondant à ρ_3 sera tangent à l'ellipse représentée par l'équation (13), et sera l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O.

2° *Le moyen moment est égal au plus grand* ou $\lambda_2=\lambda_3=b^2$. — L'intersection des surfaces, dont les équations sont la seconde et la troisième des équations (12), sera représentée par

$$(14)\qquad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1 \quad \text{(hyperbole)},$$

$$y=0 \qquad \text{d'où} \qquad \eta=0.$$

L'axe principal répondant à ρ_1 sera tangent à l'hyperbole.

Les sommets de l'une des lignes (13) et (14) sont les foyers de l'autre, d'où deux coniques homofocales conjuguées.

Ces coniques ne peuvent se rencontrer que sur Ox et à la condition que $b^2=c^2$; alors on a $\chi=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, avec $\eta=0$, $\zeta=0$, ce qui est conforme à ce qu'on a vu plus haut.

[illegible] *des moments d'inertie* [illegible] ion (9) donne la sui-

$$[illegible] + \frac{\zeta^2}{[illegible] + k^2 - c^2} = 0,$$

[illegible] rface des ondes.

[illegible] homogène; *du* un élé-

[illegible]

[illegible] ment d'inertie d'un vo-

[illegible] tégral.

CHAPITRE V.

STATIQUE.

§ I. — Préliminaires. — Systèmes à liaisons.

46. La *Statique* est la branche de la Mécanique dans laquelle on détermine les conditions que doivent remplir les forces extérieures, appliquées aux éléments d'un système matériel, pour que, étant en repos, ils ne tendent pas à se déplacer, en d'autres termes, pour que le système soit en équilibre.

Toutefois la Statique a principalement pour objectif les corps solides libres ou réagissant les uns sur les autres, comme dans les machines.

On est ainsi conduit, en se plaçant à un point de vue général, à considérer un système matériel $(m, m', \ldots, m^i, \ldots)$ dont certaines molécules sont assujetties à rester sur des courbes ou surfaces fixes.

Soient

x^i, y^i, z^i les coordonnées de m^i;

$\overline{P_e^i} = \overline{X_e^i} + \overline{Y_e^i} + \overline{Z_e^i}$ la force extérieure qui agit sur m^i;

$\overline{P_f^i} = \overline{X_f^i} + \overline{Y_f^i} + \overline{Z_f^i}$ la résultante des actions moléculaires exercées sur m^i par les autres molécules du système;

$\overline{P_n^i} = \overline{X_n^i} + \overline{Y_n^i} + \overline{Z_n^i}$ la réaction normale de la ligne ou surface fixe sur laquelle m^i est assujetti à rester;

$\delta x^i + \delta y^i + \delta z^i$ un déplacement virtuel quelconque de m^i.

Le point m étant en équilibre sous l'action $\overline{F_e} + \overline{F_f} + \overline{F_n}$, on a

$$(X_e + X_f + X_n)\,\delta x + (Y_e + Y_f + Y_n)\,\delta y + (Z_e + Z_f + Z_n)\,\delta z = 0.$$

[illegible] établies pour les m^i, on

[illegible]

[illegible] $\delta x + \ldots) = 0.$

[illegible] e la forme $mm'f(r)$, la [illegible] me positive ou négative, [illegible] tractive.

[illegible] r la droite $\overline{mm'}$ des dé-

[illegible] mutuelles de m, m' sera [illegible] r, et le second terme de [illegible] ns laquelle les lettres m^i [illegible] ite

[illegible]

[illegible] $+ Y_n \delta y + Z_n \delta z) = 0.$

[illegible] $+ Z_e dz)$ soit la différen-
[illegible] *tiel*, F_e des coordonnées;

[illegible] $x' + \ldots$

[illegible] $z + \frac{\partial F_e}{\partial x'} \delta x' + \ldots;$

[illegible] $X'_e = \frac{\partial F_e}{\partial x'}, \quad \ldots.$

[illegible] sera δF_c; d'autre part,
[illegible] n des coordonnées ou un
[illegible] r) peut s'écrire

[illegible] $\delta y + Z_n \delta z) = 0.$

[illegible] situés sur les lignes ou
[illegible] avec les liaisons, on a,
[illegible] s P_e,

[illegible] $Z_e \delta r) + \delta F_f = 0.$

[illegible] désignera par $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$
[illegible] et des forces moléculaires

qui agissent sur m et on ne considérera que des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons; alors l'équation (a) deviendra

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0. \tag{4}$$

Dans le cas d'un potentiel des forces extérieures, nous poserons $F_e + F_f = V$, et nous aurons

$$\delta V = 0,$$

ce qui exprime que, pour l'équilibre, les coordonnées doivent rendre maximum ou minimum le potentiel total.

Si la condition (4) est satisfaite, l'équilibre est assuré. Admettons, en effet, que le système (m, m', ...) tende à prendre un certain mouvement et que m tende à décrire l'élément δs dans un temps infiniment petit, on s'opposera à ce mouvement en appliquant à m une force q en sens inverse de δs; mais l'équilibre ayant encore lieu, on doit avoir

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) - \Sigma q\,\delta s = 0,$$

par suite

$$\Sigma q\,\delta s = 0,$$

ce qui est absurde puisque tous les éléments de la somme sont positifs [1].

Soient n le nombre des points matériels, k le nombre des équations dites de *liaison* des lignes et surfaces fixes. Ces k équations peuvent être combinées entre elles de manière à obtenir un nombre égal d'autres équations, mais pouvant renfermer chacune les coordonnées de plusieurs points. Pour

---

[1] Ce mode de démonstration, qui est généralement admis, nous plaît peu. Il nous semble qu'il serait désirable, en anticipant relativement à l'établissement de l'équation des forces vives, de raisonner comme il suit :

« Si m prenait une vitesse v, on aurait, en ajoutant les équations des forces vives établies pour tous les points du système matériel,

$$\Sigma m v^2 = \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z),$$

ce qui exige, vu (4), que les vitesses v soient nulles. »

[illegible] que les k équations de

$$L_k = 0$$

[illegible] rdonnées.

[illegible] es par $x + \delta x$, $y + \delta y$,

[illegible] le

$$\frac{\partial L_1}{\partial x'} \delta x' + \ldots = 0$$

$$\left(\ldots + \delta z \right) = 0 \quad \text{et de même}$$

$$\left(\ldots + \delta z \right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left(\ldots + \delta z \right) = 0.$$

[illegible] ns entre les $3n$ variations [illegible] entre elles k de ces variarbitraires dont les coeffi- [illegible] qui donnera $3n - k$ équa- [illegible] quations (5), permettront [illegible]

[illegible] n ajoutant l'équation (4) [illegible] ectivement par les para- [illegible] ro les coefficients de ces [illegible]

$$\left\{ \begin{array}{l} \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial L_k}{\partial x} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Sur ces $3n$ équations, k d'entre elles détermineront $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, et, en portant les valeurs de ces coefficients dans les autres, on obtiendra $3n - k$ équations qui, jointes aux k équations (5), permettront de déterminer les coordonnées des m^i.

La liaison $L_1 = 0$, en ce qui concerne le point m, peut être remplacée par une force dont les composantes suivant Ox, Oy, Oz seraient respectivement

$$\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_1}{\partial y}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_1}{\partial z},$$

et dont l'intensité serait

$$\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z}\right)^2}.$$

Le cosinus de l'angle formé par la direction de cette *force*, dite *de liaison*, avec Ox étant

$$\frac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial L_1}{\partial z}\right)^2}},$$

on voit que la force de liaison est normale à la surface représentée par l'équation $L_1 = 0$ dans laquelle x, y, z sont seuls considérés comme variables.

En ajoutant les équations (7) multipliées respectivement par δx, δy, δz, on vérifie que la somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle.

§ II. — Équilibre des forces appliquées à un corps solide libre.

48. *Équations d'équilibre.* — Pour un déplacement virtuel du corps, les δr sont nuls, et il ne reste que les forces extérieures dans l'équation

$$\text{(A)} \qquad \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0.$$

On sait qu'un déplacement infiniment petit du corps résulte d'un déplacement translatoire u égal à celui d'un point O qui

d'un déplacement rota-
placement du corps est
χ_x, χ_y, χ_z de u et χ
idérer chacune d'entre
s autres nulles. En fai-
(A)
$\delta y = u_y$, $\delta z = 0) = 0$,
$= u_z)$,

$\Sigma Z = 0$.

translation, expriment
es parallèlement à elles-
e nulle.

$\delta z = 0$,

et de même
$= 0$,
$= 0$.

riment que la résultante
rapport au point O doit

sfaites, le moment résul-
que O′ est nul. En effet,
arallèles à Ox, Oy, Oz;
s à ces derniers menés

$X(y - b)]$
$a\Sigma Y + b\Sigma X = 0$,

elle *moment par rapport*
ée au point (x, y, z), le
projection $\overline{X} + \overline{Y}$ de la
moment $Yx - Xy$.

49. *Des forces équivalentes.* — On peut théoriquement substituer à un groupe (G) des forces extérieures un autre groupe (G′) qui donneraient les mêmes termes dans les équations (1) et (2). Les forces des groupes (G), (G′) sont dites *équivalentes.*

Les équations d'équilibre pourront recevoir des simplifications plus ou moins importantes, si l'on peut substituer à un groupe (G) un système (G′) plus simple.

Il est clair que les groupes (G), (G′) devront donner la même résultante des forces transportées parallèlement à elles-mêmes à l'origine O et le même moment résultant par rapport à ce point. Il est évident que les forces de (G) seront fictivement tenues en équilibre par les forces de (G′) changées de sens et que les forces de (G), (G′) donneront le même travail virtuel.

I. *Une force peut être appliquée en un point quelconque de sa direction quand même ce point se trouve hors du corps, pourvu qu'il soit censé lui être invariablement relié.* — Soient

a le point d'application d'une force P;
b un point de sa direction;
$\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ les déplacements virtuels de a, b.

Comme $\overline{a'b'} = \overline{ab}$, les projections de ces déplacements sur ab seront égaux et le travail virtuel de la force P sera le même, que cette force soit appliquée en a et b.

II. *Des forces dont les directions sont concourantes peuvent être remplacées par leur résultante en les supposant appliquées au point de concours censé relié invariablement au corps.*

III. *Réduction des forces parallèles de même sens.* — Soient P^i la force appliquée au point m^i ou (x^i, y^i, z^i); α, β, γ les angles qu'elle forme avec Ox, Oy, Oz.

Si les forces P^i ont une résultante R, elle leur est parallèle et est égale à leur somme; en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point de la direction de R, les équa-

tions (2) donnent

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py = \cos\beta\,Rx_1 - \cos\alpha\,Ry_1, \\ \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px = \cos\alpha\,Rz_1 - \cos\gamma\,Rx_1, \\ \cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz = \cos\gamma\,Ry_1 - \cos\beta\,Rz_1. \end{cases}$$

Le produit Px est ce qu'on appelle le *moment de* P par rapport au plan yOz. Deux seulement des équations (3) sont distinctes, car en ajontant les deux premières respectivement multipliées par $\cos\gamma$, $\cos\beta$, on retombe sur la troisième. Les deux équations distinctes seront celles de la direction de R en un point quelconque de laquelle cette résultante pourra être censée appliquée, comme cela devait être.

En faisant varier la direction des P^i sans changer leurs points d'application, les directions des diverses résultantes obtenues se couperont en un même point, car les équations (3) sont vérifiées par

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \qquad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \qquad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Ce point, appelé *centre des forces parallèles*, est le centre des masses fictives P, P′, ..., censées concentrées en leurs points d'application, et sa position se déterminera géométriquement en suivant la marche indiquée au n° 43.

Dans le cas de la pesanteur, où de $P^i = m^i g$, on a $x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}$, $y_1 = \ldots$, $z_1 = \ldots$, et le centre des forces parallèles est le centre de masse, qui, pour ce motif, a été appelé *centre de gravité*.

IV. *Réduction de forces parallèles de sens quelconque.* — On considérera comme positives les forces de l'un des sens et comme négatives celles de l'autre. Si $R = \Sigma P$ n'est pas nul, les formules (3) s'appliqueront sans restriction, et il y aura un centre des forces parallèles. Mais il est plus simple de déterminer directement la résultante pour chacun des deux groupes de force, laquelle pourra être appliquée en un point quelconque de sa direction. On est donc ramené à composer deux forces de sens contraire P, $-P'$; en supposant $P > P'$, leur résultante sera $R = P - P'$.

Soient

O, O′ les points d'application de ces deux forces dont le plan sera xOy;

I le point d'intersection de R avec Ox;

α l'inclinaison sur $\overline{OO'}$ de la perpendiculaire dans le plan des forces à la direction de ces forces.

En prenant les moments par rapport à O′, on a

$$P.\overline{OO'}\cos\alpha = R.\overline{OI'}\cos\alpha,$$

d'où

$$\overline{O'I} = \frac{P}{P-P'}\overline{OO'},$$

et l'on est ramené à la règle de la composition de deux rotations de sens contraire.

Si $P = P'$, la résultante R serait nulle et située à l'infini, ce qui n'a pas de sens. On a alors ce qu'on appelle *un couple*.

V. *Moment résultant, par rapport à un point* O, *du système des deux forces d'un couple* (P, — P). — Prenons le plan xOy parallèle au plan du couple; comme, en projection sur les plans zOx, zOy, les forces P, — P se détruisent, Oz est l'axe du moment cherché; en désignant par p la distance des deux forces ou *bras de levier* du couple, le moment résultant sera Pp, appelé *moment du couple;* ce moment est donc indépendant de la position du point O. Il suit de là qu'on peut déplacer un couple dans son plan, transporter le plan parallèlement à lui-même; enfin modifier les forces du couple, mais de manière que son moment ne change pas.

VI. *Condition pour qu'un couple* (P, — P) *et une force* F *ait une résultante* R. — Soit O l'intersection du plan xOy du couple avec la direction de F; (x, y, z) un point quelconque de la direction de R. On doit avoir

$$(a) \qquad F_x = R_x, \qquad F_y = R_y, \qquad F_z = R_z.$$

$$(b) \quad R_y x - R_x y = Pp, \qquad R_x z - R_z x = 0, \qquad R_z y - R_y z = 0.$$

Des deux dernières équations (b), on tire, par l'élimination de R_z,

$$(R_y x - R_x y)\, z = 0,$$

ce qui exige que $z = 0$ ou que la résultante R, par suite la force F soient comprises dans le plan du couple. Cette condition est d'ailleurs suffisante, puisque F et $-$P se réduisent à une seule force qui, avec P, donne une résultante. L'équation de la direction de la position de la résultante sera donnée par la première des équations (b), c'est-à-dire par

$$F_y x - F_x y = Pp.$$

VII. *Réduction d'un groupe de forces appliquées à un solide.* — Soient O un point du solide ou un point quelconque qui lui est invariablement relié; OA la distance de ce point à l'une des forces F. Rien ne sera changé en appliquant en O deux forces égales et contraires à F, et il en résultera une force F appliquée en O et un couple dont le moment est $F \times \overline{OA}$. On obtiendra ainsi, pour toutes les forces, une résultante R appliquée en O et un couple résultant dont le moment $\mathfrak{M}$ est indépendant de la position de O, et qui n'est autre chose que le moment résultant par rapport à O des forces F.

Le moment $\mathfrak{M}$ peut être considéré comme celui d'un couple Pp dont la force P peut être prise arbitrairement et dont la force $-$P, en déplaçant en conséquence ce couple, sera appliquée au point O. Si R n'est pas perpendiculaire à $\mathfrak{M}$, les forces R et $-$P donneront une résultante R′, qui ne sera pas comprise dans un même plan avec P. Donc le système de forces peut se réduire d'une infinité de manières à deux forces non comprises dans un même plan.

VIII. *Moment ou couple minimum.* — Le point O sera un centre de réduction déterminé et Oz sera dirigé suivant R. On désignera par $\mathfrak{M}$ le moment résultant des forces par rapport à O, et l'on aura

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = R,$$

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma(Zy - Yz), \qquad \mathfrak{M}_y = \Sigma(Xz - Zx), \qquad \mathfrak{M}_z = \Sigma(Yx - Xy).$$

Soient O′ un autre centre de réduction dont a, b, c sont les coordonnées parallèles à Ox, Oy, Oz; $\mathfrak{M}'$ le moment ré-

— Rb,

+ Ra,

$a)^2$].

pour

duiront à deux

e même plan,

dans le couple

de l'inverse du

gène infiniment

fig. 28)

r, ρ la densité;

[illegible] situés dans l'inté-
[illegible] $\overline{MI'} = x + dx$;
[illegible] I, I' détermineront
[illegible] dont la surface est
[illegible] sphère aux circon-
[illegible] rons un des anneaux
[illegible] composer la couche.
[illegible] one déterminée par
[illegible] r $\overline{MO}$. A $d\omega$ répond
[illegible] sante de l'attraction
[illegible] pour l'anneau com-

$$\frac{fMM'}{2R}\,\frac{x\,dx}{r^3}.$$

$$r\,\frac{dr}{a},$$

[illegible] R, on obtient pour
[illegible] ne si sa masse était

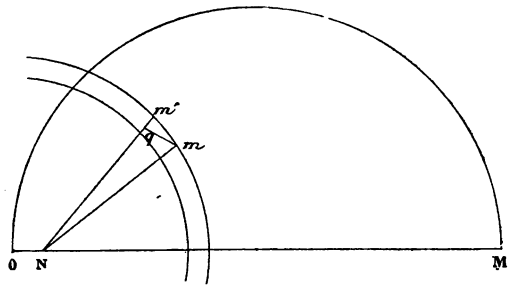
[illegible] rations géométriques sui-
[illegible] M, défini par
[illegible] N et l'ouverture sphé-

2° Ce théorème est applicable à une couche d'épaisseur quelconque, composée de couches sphériques homogènes dont la densité peut varier de l'une à l'autre des couches composantes.

---

rique $d\omega$; soient mm' l'aire qu'il intercepte sur la surface extérieure de la couche; $mq = \overline{Nm}\, d\omega$ l'élément qu'il détermine sur la surface de la sphère de

Fig. 29.



rayon Nm ayant N pour centre. On a

$$\text{aire } mm' = \frac{\overline{Nm}^2\, d\omega}{\cos \widehat{m'mq}} = \frac{\overline{Nm}^2\, d\omega}{\cos \widehat{OmN}}.$$

Le cône ayant O pour sommet et pour base mm' détermine l'élément de masse $\overline{mm'}\, e\rho$, et son attraction sur M estimée suivant MO est

$$(2) \qquad Mf\rho e \frac{\overline{Nm}^2\, d\omega}{\cos \widehat{OmN}} \times \frac{\cos mMO}{\overline{Mm}^2}.$$

Or, de ce que la formule (1) donne $\frac{Om}{ON} = \frac{OM}{Om}$, les deux triangles NOm, OmM, qui ont un angle commun en O, sont semblables, par suite $\widehat{OmN} = \widehat{mMO}$ et

$$\frac{N\overline{m}}{M\overline{m}} = \frac{O\overline{m}}{O\overline{M}} = \frac{R}{a}.$$

L'expression (2) devient, par suite, $Mf\rho e \frac{R^2}{a^2} d\omega$, d'où pour l'attraction de la couche sur M

$$Mf\rho e \frac{R^2}{a^2} 4\pi = \frac{fMM'}{a^2}.$$

II. *Attraction de deux sphères de masses* M, M′, composées comme on vient de le dire. — L'attraction de M sur une molécule m' de M′ étant la même que si la masse M était concentrée en son centre, il en est de même de l'action égale et contraire de m' sur M.

Alors M′ agit sur M suivant la loi ci-dessus. Donc les deux sphères s'attirent comme si leurs masses étaient concentrées en leurs centres respectifs.

III. *Attraction, sur un point intérieur m, d'une couche homogène limitée par deux ellipsoïdes homothétiques.* — Soit xmx' une droite menée par m sur laquelle, comme on le sait, les surfaces extérieure et intérieure du volume interceptent deux segments égaux dont nous désignons la longueur par a. Concevons un double cône ayant m pour sommet, dont l'ouverture sphérique $d\omega$ est infiniment petite, et dont xmx' est une des génératrices. L'attraction d'un élément sphérique de l'un des cônes ayant pour centre m sur ce point sera $\frac{fm}{r^2}\rho r^2 d\omega\, dr = fm\, d\omega\, dr$, d'où $afm\, d\omega$ pour l'attraction du volume déterminé par le cône. Il suit de là que les attractions exercées par les deux cônes se détruisent et que, par suite, *la couche n'exerce aucune action sur le point m.*

Donc :

L'attraction sur un point intérieur m, exercée par un ellipsoïde composé de couches homogènes homothétiques, dont la densité peut varier de l'une à l'autre couche, se réduit à celle de l'ellipsoïde passant par m.

Supposons que la Terre soit sphérique et homogène; soient

R son rayon;
r la distance d'un point intérieur m au centre;
G l'accélération absolue de la pesanteur à la surface;
G′ l'accélération en m.

On a

$$G' = f\frac{4\pi r^3}{3}\rho\frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}f\rho\pi r, \qquad G = \frac{4}{3}f\rho\pi R,$$

d'où

$$\frac{G'}{G} = \frac{r}{R}.$$

Donc l'accélération de la gravité dans l'intérieur de la Terre varie proportionnellement à la distance au centre.

IV. *Attraction d'un corps dont* M′ *est la masse sur un point matériel* M *qui en est très éloigné.* — Soient

O le centre de gravité de M′ pris pour origine des coordonnées;

Oy, Oz deux axes rectangulaires quelconques dont le plan est perpendiculaire à OMx;

x, y, z les coordonnées d'un élément matériel m de M′;

a la distance OM.

On a pour les composantes de l'attraction de M′ sur M

$$X = -fM\sum \frac{m}{\overline{Mm}^2}\,\frac{a-x}{\overline{Mm}}, \qquad Y = fM\sum \frac{m}{\overline{Mm}^2}\,\frac{y}{\overline{Mm}},$$

$$Z = fM\sum \frac{m}{\overline{Mm}^2}\,\frac{z}{\overline{Mm}}.$$

Si R′ est la plus grande valeur de Om, nous négligerons devant l'unité $\frac{R'^2}{a^2}$, par suite $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{xy}{a^2}$, ..., et nous aurons

$$\overline{Mm}^2 = \overline{Om}^2 + a^2 - 2ax = a^2\left(1 - \frac{2x}{a}\right),$$

$$(\overline{Mm})^{-3} = \frac{1}{a^3}\left(1 + 3\,\frac{x}{a}\right),$$

et comme $0 = \Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz$, les composantes de l'attraction seront

$$X = -\frac{fMM'}{a^2}, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Donc la masse M′ attire le point M comme si sa masse était concentrée en son centre de gravité.

Par un raisonnement identique à celui qu'on a fait pour les sphères, on conclut que deux corps très éloignés s'attirent, comme si leurs masses étaient concentrées en leurs centres de gravité respectifs.

Considérons deux corps M, M′ formés chacun : 1° d'une sphère composée comme on l'a dit plus haut; 2° d'un excédent sphérique ayant la même densité que la première couche et dont l'épaisseur variable est très petite. Soient μ', μ les masses des excédents sphériques de M, M′; les erreurs commises dans ce qui précède seront seulement de l'ordre $\mu'\frac{R'^2}{a^2}$, $\mu\frac{R^2}{a^2}$, et, par conséquent, très petites, sans qu'il soit nécessaire de supposer $\frac{R'}{a}$, $\frac{R}{a}$ très petits. On peut donc dire que : *c'est parce que les corps célestes sont sensiblement sphériques et que leurs distances sont sensiblement grandes qu'ils s'attirent comme si leurs masses étaient concentrées en leur centre de gravité.*

Nota. — Nous renverrons, pour la détermination de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point matériel, soit à notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste* (1re édition, Chap. III, § III), où est exposée la méthode de Chasles, soit au Tome VII (Chap. V), où l'on trouve la méthode de Gauss.

§ III. — De l'équilibre des forces appliquées à un solide assujetti à certaines conditions.

51. *Le solide repose sur un plan.* — En ne considérant que tous les points d'appui qui fonctionnent, leurs réactions normales auront une résultante dont le point d'application sera compris dans le polygone enveloppe des appuis. Il faut, en conséquence, que la résultante R des forces existantes soit normale au plan et que sa direction traverse l'intérieur du polygone ci-dessus.

S'il y a plus de trois points d'appui, leurs réactions restent indéterminées; si cela n'a pas lieu en réalité, cela tient à ce que jusqu'ici on a fait abstraction de l'élasticité de la matière. S'il s'agit d'un corps pesant reposant sur un plan horizontal, il faut que la verticale de son centre de gravité rencontre dans son intérieur le polygone défini ci-dessus.

52. *Le solide ne peut se déplacer qu'autour d'un axe fixe* Ox. — L'axe est défini par deux points fixes O, O′; on est ramené

au cas d'un solide libre en faisant intervenir les réactions N, N′ des points O, O′.

Soient R la résultante des forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque; $\mathfrak{M}$ le moment résultant de ces forces par rapport au point O.

On a, en posant $\overline{OO'} = a$,

$$R_x + N_x + N'_x = 0, \qquad R_y + N_y + N'_y = 0, \qquad R_z + N_z + N'_z = 0,$$

$$\mathfrak{M}_x = 0, \qquad \text{ce qui est la condition d'équilibre,}$$

$$\mathfrak{M}_y - N'_z a = 0, \qquad \mathfrak{M}_z + N'_y a = 0.$$

Les composantes de N, N′ parallèles à Oy, Oz sont déterminées; mais on ne connaît que la somme $N_x + N'_x$; l'indétermination de N_x, N'_x est due à ce qu'on fait abstraction de l'élasticité des épaulements qui réalisent les points fixes (*voir* le Tome III).

53. *Le solide est assujetti à tourner autour d'un point fixe* O. — Cette conception se trouve réalisée par la rotule des graphomètres, la suspension de Cardan, etc.

Si l'on désigne par N la réaction du point fixe, on a, en conservant les notations ci-dessus,

$$N_x + R_x = 0, \qquad N_y + R_y = 0, \qquad N_z + R_z = 0,$$

et pour la condition d'équilibre

$$\mathfrak{M} = 0.$$

Donc, etc.

§ IV. — Des systèmes articulés.

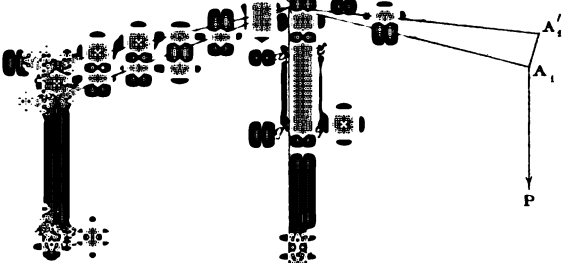
54. Un *système articulé* est formé de pièces reliées entre elles par des tourillons ou des rotules et soumises à l'action de forces extérieures.

Il est à *liaisons complètes* lorsqu'un déplacement d'une pièce détermine un déplacement unique de chacune des autres pièces. Nous ne nous occuperons que des systèmes à liaisons complètes.

On pourrait considérer chaque pièce comme libre en introduisant les réactions des articulations, réactions qu'on élimi-

quilibre de toutes les
d'elle-même en appli-
travail virtuel.

balance ordinaire. —



oignent O aux extré-
ge;

de gravité a du fléau
me lorsqu'on place un
e A;
ire du fléau produite
O est

$$) - qe \sin\theta = o,$$

$$+ qe$$

nce ne bascule pas, il
ura toujours lieu quels

que soient P et p si, comme sur la figure, le point a se trouve au-dessous de O.

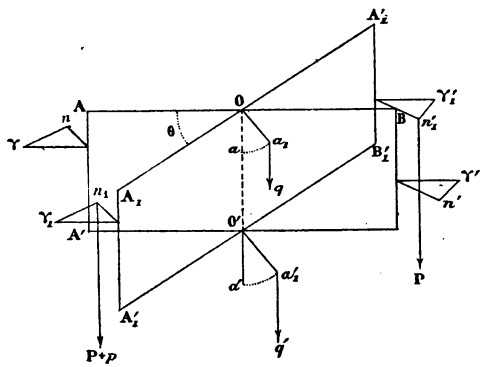
D'après l'équation (1), l'angle θ diminue, par suite la sensibilité, à mesure que P augmente. Il convient donc de faire en sorte que θ soit indépendant de P, ce qui conduit à prendre $\alpha = 90°$ et alors on a

$$\tang\theta = \frac{pl}{qe}. \tag{2}$$

La sensibilité sera alors d'autant plus grande que e sera plus petit. Si $e = 0$, la balance basculera; mais, en supprimant la masse additionnelle p, elle sera en équilibre dans toutes ses positions; l'équilibre est alors *indifférent* et la balance est dite *folle*.

56. *Balance de Roberval.* — Soient (*fig.* 31) ABA'B' un rectangle articulé aux sommets et dont les côtés horizontaux

Fig. 31.



(fléaux) AB, A'B' sont assujettis à tourner autour de leurs milieux O, O'; a, a' et q, q' les centres de gravité et les poids de AB, A'B' qui ne sont pas nécessairement identiques, tandis que AA', BB' le sont. Le système est en équilibre et nous supposerons que, par des entraves, on le maintienne dans cette position.

Fixons à AA', BB' deux appendices dont les centres de gra-

[illegible] oient $\overline{OA} = l$, $\overline{Oa} = e$, [illegible] és respectivement aux [illegible]

[illegible] me prendra une forme [illegible] era devenu un parallé- [illegible] ce 1 les lettres qui se [illegible] ésignera par θ l'angle [illegible]

[illegible] e l'ensemble des tiges [illegible] O′, leur poids ne don- [illegible] travail virtuel qui sera,

[illegible] $.e\cos\theta + q'\,\delta.e'\cos\theta = 0$,

[illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}\,l$.

[illegible] ment horizontaux quand [illegible] faut que $\mu = \mu'$, et alors

[illegible]

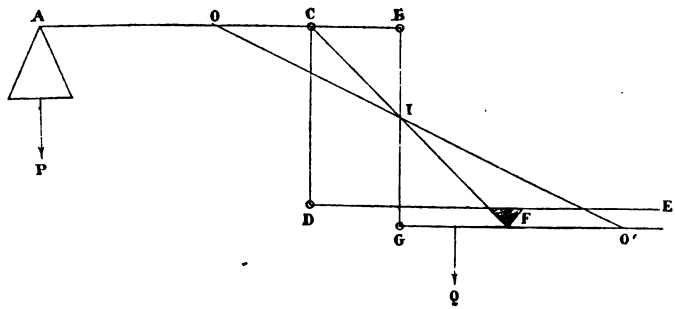
[illegible] t les plateaux seraient [illegible] nt les positions de ces [illegible] elles de ces appendices [illegible] a même forme que celle [illegible] re, il n'y a pas lieu de [illegible]

[illegible] *le*. — Soient (*fig.* 32) [illegible] nt en O sur un couteau, [illegible] ateau de balance ordi- [illegible]

[illegible] s en C et B au fléau; [illegible] r de O′ et articulé en G [illegible]

$\overline{DE}$ un tablier horizontal articulé en D à la tige $\overline{CD}$, muni d'un couteau reposant en F sur $\overline{O'G}$.

Fig. 32.



Supposons que l'on place sur le plateau un corps dont le poids est P et sur le tablier un poids Q qui fasse équilibre à P, sans que AB cesse d'être horizontal.

La condition qui doit être remplie est que, pour un déplacement angulaire $\delta\theta$ de AB autour de O, le tablier reste horizontal.

Le déplacement de B et G est $\overline{OB}\,\delta\theta$; celui de F $\frac{\overline{OB}\,\delta\theta}{\overline{O'G}} \times O'F$; ce dernier déplacement devant être égal à celui $\overline{OC}\,\delta\theta$ de C et D, on a

$$\frac{\overline{OB} \times \overline{O'F}}{O'G} = \overline{OC},$$

d'où

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{O'G}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{O'F}},$$

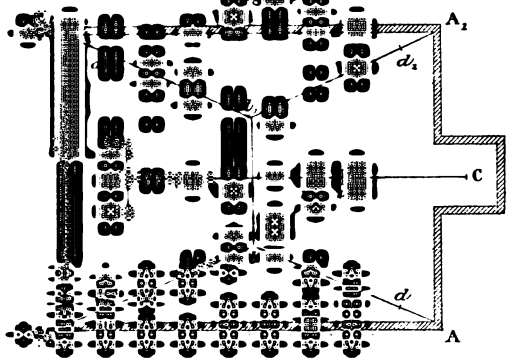
ce qui exprime que OO', CF doivent rencontrer BG en un même point I; la position de F sera donc déterminée si l'on se donne celle de C. On a maintenant

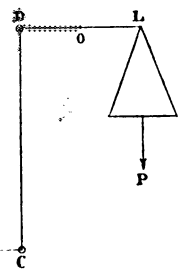
$$P \times \overline{OA}\,\delta\theta = Q\overline{OC}\,\delta\theta \qquad \text{ou} \qquad P \times \overline{OA} = Q \times \overline{OC}.$$

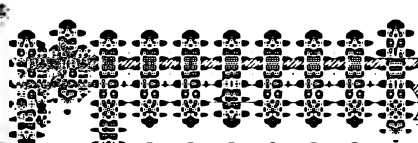
Le système se réduit donc, géométriquement, à la romaine AOC.

t (*fig.* 33)

égaux, dont les côtés
es pivots placés aux







d'une tige $\overline{IC}$ parallèle
portant un couteau sur
s triangles isoscèles;
cale $\overline{CD}$ articulée en D
re O et terminé en E

s sommets de la caisse
qui supportent un ta-

diculaires à la tige $\overline{IC}$

suivant laquelle on peut les faire glisser, qui permettent, à la suite de quelques tâtonnements, d'assurer l'horizontalité du fléau du tablier lorsque la balance n'est pas chargée;

e la distance des points d aux côtés correspondants de la caisse perpendiculaires à AA';

h la hauteur des triangles isoscèles;

P un poids placé dans le plateau qui fait équilibre à une charge Q déposée sur le tablier;

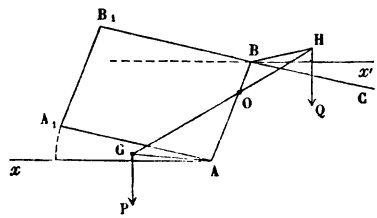
$\delta\theta$ un déplacement virtuel de $\overline{IC}$ autour de aa_1.

Le travail virtuel de P est $P \times \frac{IC}{DO}\delta\theta.OE$; celui de Q, $Q \times \frac{IJ}{h}\delta\theta \times e$, d'où, en égalant,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{IJ} \times \overline{OD}}{\overline{IC} \times \overline{OE}} \frac{e}{h}.$$

59. *Pont-levis à flèche.* — Cette construction (*fig.* 34) se compose essentiellement du tablier AA_1 et de la bascule B_1BC ayant respectivement la faculté de tourner autour de deux axes horizontaux parallèles A, B.

Fig. 34.



Les deux sommités A_1 du tablier opposées à A sont reliées par des chaînes, aux extrémités deux poutres appelées *flèches,* formant la partie extérieure de la bascule de manière à déterminer un parallélépipède quand le tablier est horizontal; il est clair que, quelle que soit la position du tablier, la figure ne cesse pas d'être un parallélépipède. Les flèches se prolongent de l'autre côté de l'axe B et forment les côtés laté-

raux d'un châssis faisant contrepoids et qui peut recevoir des masses additionnelles.

La condition que doit remplir le système est d'être en équilibre pour toutes les positions du tablier.

Nous pouvons supposer que le système est réduit à sa projection sur son plan vertical moyen.

Soient

G, H les centres de gravité du tablier et de la bascule dans une position quelconque;

P, Q les poids de ces deux pièces devant lesquels ceux des chaînes sont négligeables;

$\overline{GA} = R$, $\overline{BH} = R'$;

α, α' les angles de R, R' avec $\overline{AA_1}$, $\overline{BC}$;

θ l'inclinaison de $\overline{AA_1}$, $\overline{BC}$ sur les horizontales Ax, Bx' de A, B;

$\delta\theta$ un déplacement virtuel de AA_1.

L'équation du travail virtuel est

$$PR\cos(\theta - \alpha)\,\delta\theta - QR'\cos(\alpha' - \theta)\,\delta\theta = 0$$

ou

$$PR\cos(\theta - \alpha) = QR'\cos(\theta - \alpha').$$

Comme cette relation doit avoir lieu quel que soit θ, il faut que $\alpha = \alpha'$, et comme on a alors

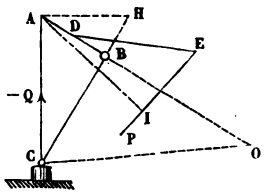
$$PR = QR',$$

le centre de gravité O du système se trouve en un point fixe de AB.

60. *Du genou.* — Cette machine (*fig.* 35) se compose d'une manivelle AB mobile autour d'un axe horizontal A; d'une bielle BC articulée en B à cette manivelle, et dont l'autre extrémité C est articulée à une pièce qui doit agir par compression sur un corps. L'articulation C est assujettie à glisser dans une rainure dont l'axe de figure passe par le point A. Une force P agit à l'extrémité E d'une pièce $\overline{DE}$ invariablement liée à $\overline{AB}$, et produit en C l'effort de compres-

sion Q; de sorte que P et la réaction — Q doivent se faire équilibre sur le système.

Fig. 35.



Soient

O le centre instantané de $\overline{BC}$;

I le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la direction de P;

$\theta = \widehat{BAC}$.

Pour un déplacement virtuel de AB, le travail de P est $P \times \overline{AI}\,\delta\theta$ et celui de Q, $Q\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BO}}\,\delta\theta \times \overline{OC}$, d'où, en égalant,

$$Q\frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{\overline{BO}} = P \times \overline{AI}$$

ou

$$P \times \overline{AI} = Q \times \overline{AH},$$

H étant l'intersection de la perpendiculaire en A et $\overline{AC}$ avec la direction de BC.

On voit ainsi que, si la manivelle est très courte par rapport à la longueur de la bielle, la force P produit un effort de compression relativement considérable.

§ V. — Des systèmes funiculaires.

61. Si l'on conçoit un corps élastique soustrait à l'action de toute force extérieure, on dit qu'il est *à l'état naturel.* Une corde, dans cet état, est assimilée à un cylindre homogène. On peut supposer que le cylindre est couché sur un plan

horizontal qui neutralisera, à très peu de chose près, les effets de la pesanteur.

Considérons une corde OA fixée en O; si en A, suivant l'axe, on exerce une traction P, la corde s'allongera jusqu'au moment où l'équilibre s'établira entre P et les actions moléculaires développées dans la masse de la corde; mais l'allongement relatif à P est très petit et peut être négligé. La force P est égale à la résultante des pressions élémentaires développées dans une section, résultante qui sera, par conséquent, une pression négative qu'on appellera ici *tension*. Si l'on supprime l'action de P, la corde reviendra rapidement à sa forme primitive, ce qui caractérise la propriété physique de l'*élasticité*. Ce qui précède suppose, comme on continuera à l'admettre, que P ne dépasse pas une certaine limite au delà de laquelle, si l'on supprimait cette force, la corde ne reviendrait plus à sa longueur primitive, tandis que, en la maintenant, l'allongement irait en croissant jusqu'à ce que la rupture se produise.

Si l'on admet que P change de sens ou devienne une compression, en raison de la grande flexibilité de la corde, il n'y aura plus de forme d'équilibre bien définie, et le point d'application A viendra coïncider avec O; une corde diffère en cela d'un prisme élastique qui subit seulement une réduction dans sa longueur.

On pourra faire abstraction de la section de la corde, pour ne considérer que son axe, ce qui revient, si l'on veut, à substituer un *fil* à la corde.

62. *Forme d'équilibre d'un polygone funiculaire* $A_1A_2 \ldots A_n$ (*fig.* 36). — On peut réaliser comme il suit un polygone de cette nature. Les points A_1 et A_n sont les extrémités d'une corde; en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont noués des cordons, suivant lesquels s'exercent les tensions $T_1, P_1, P_2, \ldots, P_n, -T_{n+1}$. On se donne les longueurs $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$, et les forces $T_1, P_1, \ldots, P_n$; il s'agit de déterminer la forme d'équilibre du polygone et la valeur de T_{n+1} qui convient à l'équilibre.

On désignera par T_{i+1} la tension du côté A_iA_{i+1} agissant sur A_{i+1}.

Les tensions T_i, $-T_{i+1}$ devant faire équilibre en A_i à P_i, la tension T_{i+1} (*fig.* 36 *bis*) est la résultante de T_i, P_i. Portons

Fig. 36.

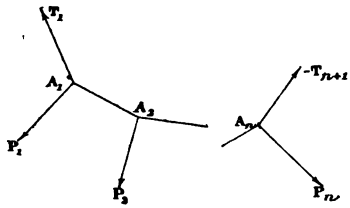
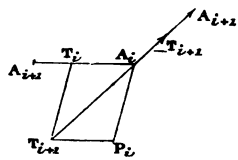


Fig. 36 *bis*.

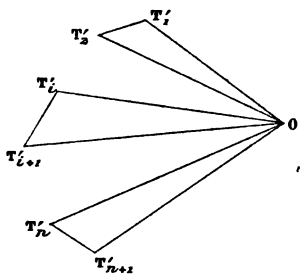


à partir d'un point arbitraire O (*fig.* 36 *ter*), et parallèlement,

$$\overline{OT'_1} = T_1, \quad \overline{T'_1\,T'_2} = P_1, \quad \overline{T'_2\,T'_3} = P_2, \quad \ldots, \quad \overline{T'_n\,T'_{n+1}} = P_n.$$

Nous voyons que $\overline{OT'_{i+1}}$ représente T_{i+1}, et $\overline{OT'_{n+1}}$ la tension extrême cherchée $-T_{n+1}$ changée de sens.

Fig. 36 *ter*.



Pour construire le polygone funiculaire, on mènera $\overline{A_1A_2}$, dont la longueur est donnée, parallèle à $\overline{OT'_2}$; $\overline{A_2A_3}$ parallèle à $\overline{OT'_3}$, et ainsi de suite jusqu'en A_n; la parallèle en A_n à $\overline{OT'_{n+1}}$ sera la direction de T_{n+1}.

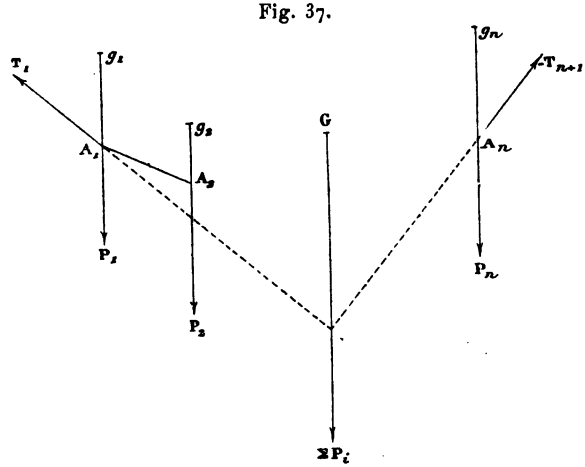
Les forces T_1, $-T_{n+1}$ font équilibre aux forces P_1, P_2, ..., P_n sur le polygone considéré comme rigide; car, pour un déplacement virtuel de ce polygone, compatible avec l'hypothèse de sa solidité, il ne reste dans l'équation du travail virtuel que les forces $-T_1$, P_1, ..., P_n, T_{n+1}.

Si les forces T_1, P_1, P_2, ..., P_n sont parallèles à un plan, le polygone funiculaire sera compris dans un plan parallèle au précédent, et alors la force résultante T_1, $-T_{n+1}$ sera égale et contraire à celle des P_i; de sorte que les directions de T_1, $-T_{n+1}$ se couperont sur la direction de la résultante des P_i.

Lorsque les P_i sont parallèles, le polygone funiculaire est plan quelle que soit la direction de T_1; et la ligne $T'_1 T'_2 \ldots T'_{n+1}$ (*fig.* 36 *ter*) est une droite. Si tous les P_i ne sont pas de même sens, il faudra y avoir égard dans la construction de la *fig.* 36 *ter;* ainsi, par exemple, si P_2 est de sens contraire à P, il faudra porter $\overline{T'_1 T'_2} = P_2$ de T'_2 vers T'_1. Dans le cas où les P_i se réduisent à un couple, les points T'_1, T'_{n+1} coïncident; enfin si le bras de levier du couple est nul, le polygone funiculaire est fermé.

63. *Application à la détermination du centre de gravité* G *d'un système de corps* m_1, m_2, ..., m_n, *dont les centres de gravité respectifs* g_1, g_2, ..., g_n *sont compris dans un même*

Fig. 37.



plan. — Appliquons, dans le plan, aux points g_1, g_2, ..., g_n des forces P_1, P_2, ..., P_n (*fig.* 37) parallèles entre elles et proportionnelles aux masses m_1, m_2, ..., m_n. Par un point

[illegible] droite OT'_1 pa- [illegible] et la longueur

[illegible] parallèle en T'_1 [illegible] leurs $\overline{T'_1 T'_2} = P_1$, [illegible] les rayons $\overline{OT'_1}$,

[illegible] direction de P_2, etc.

[illegible] polygone funiculaire [illegible] centre de gra- [illegible] parallèle aux P_i [illegible] directions de T_1,

[illegible] une droite sur la- [illegible] par suite déter-

[illegible] — Nous suppo- [illegible] les ont la même

[illegible] qui relient les câ- [illegible] charge sur le

[illegible] sur les tiges. Il [illegible] polygone du funiculaire [illegible]

[illegible] *pair*. — Le nombre [illegible] côté du milieu A_0A_0 [illegible]

[illegible] du polygone à partir [illegible] iques du polygone ; [illegible] point A_0 dirigée en [illegible]

[illegible] A_p.

[illegible] t au point A_p pour [illegible] polygone est en équi-

[illegible] $l\frac{p(p+1)}{2}$,

[illegible]

[illegible] sommet de chaque [illegible] La tension T_0 étant [illegible] n° 62 permettra de [illegible] s tensions des autres [illegible]

[illegible] primant les indices, [illegible]

équation d'une parabole passant par les sommets et qui, étant construite, permettra de déterminer facilement la forme du polygone funiculaire.

2° *Le nombre des tiges de suspension est impair.* — Le nombre des côtés étant pair, il y a un sommet A_0 au milieu du polygone et dont la verticale est un axe de symétrie.

Soient

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ les sommets de l'une des deux parties symétriques du polygone, le dernier se trouvant au sommet du pilier;

T_0, T_p les tensions de côtés A_0A_1, A_pA_{p+1};

$x_p = pl$, y_p les coordonnées de A_p par rapport à l'horizontale de A_0 et à la verticale de ce point dirigée en sens inverse de la pesanteur.

Les tensions égales T_0 des côtés aboutissant au point A_0, faisant équilibre à la force P appliquée à ce point, la composante verticale de T_0 est $\frac{P}{2}$. Nous désignerons par T'_0 sa composante horizontale.

En prenant les moments par rapport au point A_p, on trouve

$$(4) \qquad T'_0 y_p = Pl + P \times 2l + \ldots + Ppl - \frac{P}{2}pl = \frac{Plp^2}{2},$$

d'où

$$(5) \qquad T'_0 = \frac{Pln^2}{2y_n}.$$

En exprimant p au moyen de x_p, puis supprimant les indices des coordonnées, l'équation (4) devient

$$y = \frac{Px^2}{2lT_0},$$

équation d'une parabole passant par les sommets.

Les tensions des côtés se détermineront comme on l'a dit plus haut.

65. *Courbes funiculaires.* — Supposons que tous les éléments du fil soient sollicités par des forces de même ordre

[illegible] affectera une forme

[illegible] faire équilibre aux [illegible] it par suite *être com-* [illegible] osculateur est per- [illegible] urbe est plane.

[illegible] gulaires de P, dont la [illegible] ngle de contingence [illegible] s $P_t\,ds$ et $T + \frac{dT}{ds}ds$.

$$[illegible] = 0,$$

$$[illegible] P_n\,ds = 0,$$

$$[illegible]$$

$$\frac{T}{\rho} + [illegible]$$

Ces deux équations jointes à celle qui exprime que le plan osculateur renferme P donneront, par l'élimination de T, celles de la courbe rapportée à trois axes rectangulaires.

On peut opérer autrement : en posant $\overline{P} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$, on a pour la condition d'équilibre du point b suivant Ox,

$$-T\frac{dx}{ds} + \left(T\frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds}T\frac{dx}{ds}ds\right) + X\,ds = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}T\frac{dx}{ds} + X = 0 \qquad \text{et de même}\\ &\frac{d}{ds}T\frac{dy}{ds} + Y = 0,\\ &\frac{d}{ds}T\frac{dz}{ds} + Z = 0.\end{aligned}\right.$$

Les équations de la courbe s'obtiendront par l'élimination de T entre les équations (3).

De ces mêmes équations (3), on déduit facilement les équations (1) et (2). En effet, soient

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

les cosinus des angles formés par la tangente avec Ox, Oy, Oz;

$$\cos\lambda = \frac{d\cos\alpha}{d\varepsilon}, \qquad \cos\mu = \ldots, \qquad \cos\nu = \ldots$$

les cosinus des angles formés par la normale principale avec Ox, Oy, Oz.

En ajoutant les équations (3) multipliées respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on trouve

$$\frac{dT}{ds}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$+ \frac{T}{2}\frac{d}{ds}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1).

[illegible]

[illegible] $\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = 0$

[illegible]

[illegible] $\overline{\cos\gamma}^2)$

[illegible] $\cos\mu + Z\cos\nu = 0$

[illegible] $\cos\nu = 0,$

[illegible]

[illegible] la forme

$$[illegible] \frac{dz}{ds} = 0$$

[illegible] $dz = 0.$

[illegible] $dx + Y\,dy + Z\,dz$ est [illegible] aura plus à considérer [illegible] premières des équa-

[illegible] $- Xy = 0,$

[illegible] $) + Yx - Xy = 0,$

[illegible] $) + Yx - Xy = 0,$

[illegible] $- Xy = 0$ et de même

[illegible] $- Yz = 0,$

[illegible] $- Zx = 0.$

[illegible] de s, la pre-
[illegible] première des
[illegible] (5) en consi-
[illegible] les moments
[illegible]

$$[illegible] (Xy)\, ds = 0$$

[illegible]

[illegible] équations (5).
[illegible] la seule force
[illegible] normale de la
[illegible] un osculateur,
[illegible] force géodésique.
[illegible] constante.
[illegible] ne nous allons
[illegible] ment la ques-
[illegible] à celles qui en

[illegible] *mentaires.* —
[illegible] gerons Oy en
[illegible] courbe aura évi-
[illegible] minimum m_0 par
[illegible]

[illegible] conque m dont
[illegible]

En projetant les forces qui sollicitent l'arc $m_0 m$ sur Ox et sur la normale en m, on a

$$(a) \qquad T \cos\alpha = T_0,$$

$$(b) \qquad T_0 \sin\alpha = \cos\alpha \int_0^s P\,ds.$$

On tire de la seconde de ces équations

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{T_0}\int_0^s P\,ds,$$

$$P\,ds = T_0 \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$(7) \qquad P\,dx = T_0 \frac{d\alpha}{\cos\alpha},$$

$$(8) \qquad P\,dy = T_0 \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Nous avons maintenant deux cas à examiner :

1° P *ne dépend que de* y. — L'équation (8) donne

$$\frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \frac{1}{T_0}\int_{y_0}^{y} P\,dy,$$

et, en posant

$$M = 1 + \frac{1}{T_0}\int_{y_0}^{y} P\,dy,$$

on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{M^2 - 1} = \frac{dy}{dx},$$

d'où, pour l'équation de la courbe,

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

2° P *ne dépend que de* x. — L'équation (7) donne, par l'intégration,

$$\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = e^{\frac{1}{T_0}\int_0^x P\,dx},$$

d'où, en représentant par N le second membre de cette égalité,

$$\tang \alpha = \frac{N^2 - 1}{2N} = \frac{dy}{dx},$$

et enfin

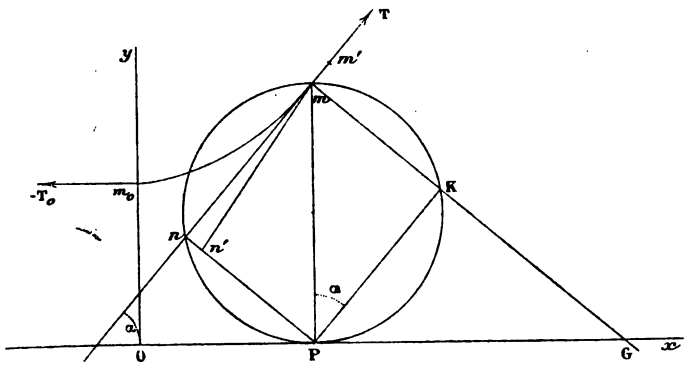
$$y - y_0 = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{N^2 - 1}{N}\, dx.$$

67. *Chaînette.* — On désigne ainsi la forme d'équilibre d'un fil pesant, dont les extrémités sont attachées à deux points fixes.

Nous dirigerons l'axe Oy en sens inverse de la pesanteur, et nous le ferons passer par le point le plus bas m_0 de la courbe, où la tension désignée par T_0 est horizontale, la position de l'origine O restant indéterminée. Nous désignerons par p le poids de l'unité de longueur du fil.

Soient (*fig.* 39)

Fig. 39.



T la tension au point m dont les coordonnées sont $x = \overline{OP}$, $y = \overline{mP}$;

α son inclinaison sur Ox;

s l'arc $m_0 m$;

$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$ le rayon de courbure en m.

Les forces $-T_0$, T, ps se faisant équilibre sur le point m,

on a, en projetant sur Ox et la normale en m,

$$(a) \qquad T\cos\alpha = T_0,$$

$$T_0 \sin\alpha = ps\cos\alpha;$$

et, en posant

$$(b) \qquad a = \frac{T_0}{p},$$

la seconde de ces équations donne

$$(1) \qquad s = a\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

On déduit successivement de l'équation (1)

$$(2) \qquad \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{a}{\cos^2\alpha},$$

$$(3) \qquad dy = ds\sin\alpha = -a\frac{d\cos\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$(4) \qquad dx = ds\cos\alpha = a\frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

En déterminant la position de O par la condition que $\overline{m_0O} = a$, l'équation (3) donne

$$(5) \qquad y = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Soit K l'intersection de la normale avec la circonférence décrite sur le diamètre $\overline{mP} = y$; l'équation (5) donne $mK = a$. Donc *la projection de l'ordonnée sur la normale est constante.*

Soit G l'intersection de la normale avec Ox; on a

$$mG = \frac{y}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos^2\alpha} = \rho.$$

Donc *le rayon de courbure est égal à la normale* (1).

---

(1) Cette propriété étant caractéristique, la chaînette est le lieu du foyer d'une parabole roulant sur une droite. C'est par inadvertance que, au bas de la page 338 du Tome VII, on a admis cette restriction que C est une constante positive, car elle peut être de la forme $\beta\sqrt{-1}$, comme le prouve la suite des calculs.

On déduit de l'équation (4)

$$(6)\qquad x = a \log \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}};$$

d'où successivement

$$(7)\qquad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - 1}{e^{\frac{x}{a}} + 1},$$

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Enfin l'équation (8), en se rappelant que $y = a$ pour $x = 0$, donne pour celle de la courbe

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Soit n l'intersection de la tangente en m avec la circonférence décrite sur le diamètre mP; on a $mn = \mathrm{PK} = a \operatorname{tang}\alpha = s$. Donc *la projection du pied de l'ordonnée sur la tangente est un point de la développée* (tractrice) *de la chaînette.*

On a

$$\text{aire } mm_0\mathrm{OP} = \int y\,dx = a\int_0^\alpha \frac{dx}{\cos\alpha} = a\int_0^s ds = \overline{m\mathrm{K}}.\overline{mn} = \text{aire } mn\mathrm{PK},$$

d'où un théorème que nous nous dispenserons d'énoncer en langage ordinaire.

Soit y_1 l'ordonnée du centre de gravité de l'aire déterminée par deux ordonnées symétriques par rapport à Oy, l'axe des x et la courbe; on a, en désignant par s l'arc intercepté,

$$asy_1 = 2\int_0^x y\,dx\,\frac{y}{2} = a^3\int_0^\alpha \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = a^3\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Si y_2 est l'ordonnée du centre de gravité de s, on a

$$sy_2 = 2\int_0^{\frac{s}{2}} y\,ds = 2a^2\int_0^\alpha \frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = 2a^2\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha},$$

CHAPITRE V.

[illegible] de navire, maintenue [illegible] la direction du vent. [illegible] rmée de fils indépen- [illegible] diculaires aux vergues,

[illegible] ;

[illegible] $d\alpha$,

[illegible] Ox, Oy. On a

[illegible] $\frac{d\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\, d\alpha\Big)$,

[illegible] $\sin\alpha\, d\alpha$;

[illegible] $= 0$,

$\eta = a\cos\alpha$;

[illegible] $\sqrt{1 - \frac{\eta_1^2}{a^2}}\Big]$.

[illegible] est verticale; Ox est une asym-

[illegible] ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

[illegible] O est

[illegible] $d\alpha = \pi\frac{a^2}{4}$,

[illegible] le diamètre Om_0. De ce que [illegible] *égales tangentes.*

que la pression exercée par le vent sur un fil lui est normale, et qu'elle est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse V du vent.

Soient

Oy un axe dirigé en sens inverse de V;
yOx un plan perpendiculaire aux vergues dont les traces sont A et B;
α l'inclinaison de la tangente sur Ox.

On a, k étant le coefficient de la résistance,

$$P_t = 0, \qquad P_n = -kV^2 \cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{dT}{ds} = 0 \qquad \text{ou} \qquad T = \text{const.},$$

$$T\frac{d\alpha}{ds} = kV^2 \cos^2\alpha.$$

En posant $a = \frac{kV^2}{T}$, la dernière de ces équations donne

$$ds = a\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha};$$

d'où, en mesurant s à partir du point de la courbe où la tangente est parallèle à Ox,

$$s = a \operatorname{tang}\alpha.$$

Cette courbe est donc une chaînette dont l'axe extérieur est parallèle à Ox.

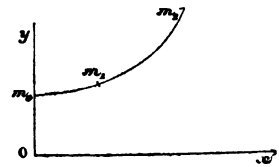
Proposons-nous maintenant de déterminer les éléments d'une chaînette lorsqu'on se donne les positions m_1, m_2 des deux points d'attache, le premier étant censé plus élevé que l'autre, ainsi que la longueur l de la chaînette entre ces deux points.

Soient (*fig.* 40) h, k les distances verticale et horizontale de m_2, m_1.

La figure suppose que le sommet inconnu m_0 se trouve en dehors des verticales de m_1, m_2. Le calcul rectifiera cette hypothèse quand il y aura lieu.

En désignant par x_2, y_2 les coordonnées de m_2 par rapport

Fig. 40.



aux axes Ox, Oy, dont la position est à déterminer, on a

$$h = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}} + e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{\frac{x_2-k}{a}} - e^{-\frac{x_2-k}{a}}\right),$$

$$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{\frac{x_2-k}{a}} + e^{-\frac{x_2-k}{a}}\right).$$

Si l'on pose

$$(9) \qquad e^{\frac{x_2}{a}} = u, \qquad e^{\frac{k}{a}} = \lambda,$$

il vient

$$(10) \qquad \begin{cases} hu\lambda = \frac{a}{2}(\lambda - 1)(u^2 - \lambda), \\ lu\lambda = \frac{a}{2}(\lambda - 1)(u^2 + \lambda); \end{cases}$$

d'où, par division,

$$(11) \qquad \lambda = \frac{u^2(l-h)}{l+h}.$$

En portant cette valeur (11) dans la première des équations (10), on obtient

$$(12) \qquad \frac{u}{a}(l^2 - h^2) = u^2(l-h) - (l+h);$$

mais la seconde des équations (9) donne, en ayant égard à la valeur (11),

$$(13) \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{k}\log\frac{u^2(l-h)}{l+h},$$

et l'équation (12) devient par suite

$$(14) \qquad \frac{1}{k}\log\frac{u^2(l-h)}{l+h}\,u(l^2 - h^2) = u^2(l-h) - (l+h);$$

d'où l'on déduit u; l'équation (13) fera ensuite connaître a, puis la première des équations (9) la valeur de x_2, et enfin y_2 se déduira de l'équation de la chaînette.

La valeur de y_2 déterminera la position de Ox; celle de x_2 la position de Oy.

Selon que $x_2 \gtrless k$, le sommet m_0 sera situé comme dans la *fig.* 40, ou se trouvera entre les verticales de m_1, m_2.

68. *Fil dont chaque élément ds est sollicité par une force verticale p dx proportionnelle à sa projection horizontale dx.* — Soient

Ox la tangente au point le plus bas O, Oy étant dirigé en sens inverse de p;

$x = On$, $y = mn$ les coordonnées d'un point quelconque m de la courbe;

I l'intersection avec Ox et α l'inclinaison sur cet axe de la tangente en m;

T_0, T les tensions en O et m.

Il faut, pour l'équilibre, que I soit le milieu de On, ce qui caractérise la parabole.

On arrive aussi d'ailleurs à ce résultat en prenant les moments par rapport à m, ce qui donne

$$T_0 y = \frac{px^2}{2}.$$

Enfin, si l'on projette sur la normale, on a

$$T_0 \sin\alpha = px\cos\alpha$$

ou

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{px}{T_0} = \frac{dy}{dx};$$

d'où l'équation précédente.

69. *Forme d'équilibre d'un fil plan soumis à une pression normale.* — On a

$$P_t = 0 = \frac{dT}{ds}, \qquad \text{d'où} \qquad T = \text{const.}$$

Nous supposerons que la pression soit de la forme

$$P_n = -\frac{T}{2}(ax + by + c),$$

expression dans laquelle a, b, c sont des constantes. Comme en changeant les axes coordonnés, P_n conserve la même forme, on peut supposer que Ox est tangent à la courbe, et l'on désignera par α l'inclinaison sur cet axe de la tangente au point (x, y).

De l'équation $\frac{T}{\rho} + P_n = 0$, on tire successivement

$$(1) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{2}(ax + by + c),$$

$$(1') \qquad \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{1}{2}\left(a\frac{dx}{ds} + b\frac{dy}{ds}\right) = \frac{1}{2}(a\cos\alpha + b\sin\alpha).$$

En multipliant la dernière de ces équations par $d\alpha$, et intégrant, on obtient

$$(2) \qquad \frac{d\alpha^2}{ds^2} = a\sin\alpha - b\cos\alpha + \text{const.}\,k.$$

On a $\alpha = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$, et les équations (1) et (2) donnent

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_0 = \frac{c}{2}, \qquad \left(\frac{d\alpha^2}{ds^2}\right)_0 = -b + k,$$

d'où

$$(3) \qquad k = b + \frac{c^2}{4}.$$

Si l'on pose

$$\Delta = \sqrt{a\sin\alpha - b\cos\alpha + k},$$

l'équation (2) donne successivement

$$(4) \qquad ds = \frac{d\alpha}{\Delta},$$

$$(5) \qquad s = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\Delta},$$

par suite

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha}{\Delta}\,d\alpha, \\ y = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{\sin\alpha}{\Delta}\,d\alpha. \end{cases}$$

On reconnaîtra facilement que les équations (6) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} ax+by = 2\Delta - 2\sqrt{-b+k} = 2\Delta - c, \\ ay-bx = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{(a\sin\alpha - b\cos\alpha + k - k)}{\sqrt{a\sin\alpha - b\cos\alpha + k}} \\ \qquad = \displaystyle\int_0^\alpha \Delta\,d\alpha - k\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\Delta} = \int_0^\alpha \Delta\,d\alpha - ks. \end{cases}$$

Les intégrales $\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\Delta}$, $\int_0^\alpha \Delta\,d\alpha$ qui entrent dans la seconde des équations (7) se mettent facilement et respectivement sous la forme des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce.

Admettant qu'un filtre soit composé de fils disjoints partant du sommet O, on a, en appelant Π le poids spécifique du liquide, h la hauteur du niveau,

$$P_n = -\Pi(h-y),$$

et alors

$$a = 0, \qquad \frac{bT}{2} = -\Pi, \qquad \frac{cT}{2} = \Pi h,$$

d'où la forme de la section méridienne du filtre.

70. *Forme d'équilibre d'un fil dont les éléments sont sollicités par des forces proportionnelles à une fonction de la distance à un axe fixe, normales à cet axe.* — Soient

Oz l'axe;
r la distance d'un point m de la courbe;
θ l'angle formé par le plan zOm avec le plan zOx;
$f'(r)$ la force extérieure considérée comme positive si elle est dirigée de Oz vers m.

En désignant par A une constante, l'équation (4) du n° 65 donne

$$(a) \qquad T = -f(r) + A.$$

Le second terme de la première des équations (5) du même numéro étant nul, nous avons, en désignant par B une autre constante,

$$T\frac{x\,dy - y\,dx}{ds} = B$$

ou

$$Tr^2\frac{d\theta}{ds} = B.$$

En élevant au carré et remarquant que

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2,$$

on trouve

$$(b) \qquad r^2\frac{d\theta^2}{dr^2}(T^2r^2 - B^2) = B^2\left(1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right).$$

La troisième des équations (3) du n° 65 nous donne, en désignant par C une troisième constante,

$$T\frac{dz}{ds} = C,$$

d'où, en élevant au carré et remplaçant ds^2 par son expression,

$$(c) \qquad \frac{dz^2}{dr^2} = \frac{C^2}{T^2 - C^2}\left(r^2\frac{d\theta^2}{dr^2} + 1\right).$$

En portant cette valeur dans l'équation (b), on trouve

$$d\theta = \frac{B\,dr}{\pm r\sqrt{r^2(T^2 - C^2) - B^2}},$$

d'où, par l'élimination de T au moyen de l'équation (a),

$$A \qquad d\theta = \frac{B\,dr}{\pm r\sqrt{r^2\{[A - f(r)]^2 - C^2\} - B^2}}.$$

L'équation (c) donne par suite

$$\text{(B)} \qquad dz = \frac{C r\, dr}{\pm\sqrt{r^2\{[A - f(r)]^2 - C^2\} - B^2}}.$$

La solution du problème se ramène ainsi à deux quadratures.

L'intégration des équations (A) et (B) introduira deux nouvelles constantes M et N. Nous avons donc à déterminer les cinq constantes A, B, C, M, N. Nous affecterons respectivement des indices 1 et 2 les coordonnées r, θ, z des extrémités du fil qui, comme la longueur l du fil, sont des données de la question. En exprimant que

$$\theta = \theta_1, \quad z = z_1 \quad \text{pour} \quad r = r_1,$$
$$\theta = \theta_2, \quad z = z_2 \quad \text{»} \quad r = r_2,$$
$$l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2} + \frac{dz^2}{dr^2} + 1}\,.\,dr,$$

nous aurons les cinq équations qui nous permettront de déterminer les constantes.

Si les extrémités du fil se trouvent dans le plan zOx, la courbe sera comprise dans ce plan, et on aura ainsi pour l'équation différentielle de la courbe

$$\text{(B')} \qquad dz = \frac{C\, dr}{\pm\sqrt{[A - f(r)]^2 - C^2}}.$$

Dans le cas où les deux extrémités du fil se trouvent dans le plan xOy, on a

$$C = 0$$

et

$$\text{(A')} \qquad d\theta = \frac{dr}{\pm\sqrt{r[A - f(r)]^2 - B^2}}$$

pour l'équation différentielle de la courbe.

Supposons que les plans zOx, zOy tournent uniformément autour de Oz en entraînant le fil avec eux. Si nous désignons par μ^2 une constante donnée proportionnelle au

carré de la vitesse angulaire, nous pourrons écrire

$$f(r) = \mu^2 r^2,$$

et, en posant $r^2 = u$, les équations (A) et (B) deviennent

$$(A_1) \qquad d\theta = \frac{B\,du}{\pm 2u\sqrt{u[(A-\mu^2 u)^2 - C^2] - B^2}},$$

$$(B_1) \qquad dz = \frac{C\,du}{\pm 2\sqrt{u[(A-\mu^2 u)^2 - C^2] - B^2}} \quad (^1).$$

---

(1) *Fil d'égale résistance.* — On désigne ainsi un fil dont la section ω varie avec s de manière que la tension rapportée à l'unité de section soit une constante donnée K. On a donc à déterminer la fonction de s qui représente ω et la forme de l'axe du fil.

Soient χ, η, ζ les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la force extérieure qui agit sur l'unité de section. Nous devrons supposer dans les formules établies au n° 66

$$T = K\omega, \qquad X = \omega\chi, \qquad Y = \omega\eta, \qquad Z = \omega\zeta.$$

Mais nous nous bornerons à considérer le cas où la force extérieure est parallèle à l'axe Oy et est censée dirigée en sens inverse de cet axe.

Nous ferons ainsi $P = \omega\eta$, $T_0 = K\omega_0$ dans les formules (a) et (b) du n° 67, en désignant par ω_0 la section au point le plus bas m_0. Nous aurons ainsi

$$(1) \qquad \omega\cos\alpha = \omega_0,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{K\omega_0}\int_0^s \omega\eta\,ds,$$

d'où, par l'élimination de α,

$$\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{K}\int_0^s \omega\eta\,ds,$$

et successivement

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} = \frac{\eta\,ds}{K},$$

$$\log\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}\right) = -\frac{1}{K}\int_0^s \eta\,ds.$$

Si nous posons

$$(3) \qquad Q = e^{-\frac{1}{K}\int_0^s \eta\,ds},$$

nous aurons

$$(4) \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{Q^2+1}{2Q},$$

71. *Mouvement d'un fil.* — Nous conserverons les notations du n° 66, à cette exception près que nous représenterons par $\mu P\,ds$ au lieu de $P\,ds$ la force extérieure qui agit sur ds en désignant par μ la masse de l'unité de longueur du fil.

La coordonnée x sera une fonction de t, s et les composantes suivant Ox et de l'accélération de ds seront respecti-

---

d'où, en vertu de la relation (1),

$$\frac{dx}{ds} = \frac{2Q}{Q^2+1}, \tag{5}$$

pour l'équation différentielle de l'axe du fil.

Comme premier exemple, considérons le cas de la pesanteur et désignons par p le poids spécifique du fil; le poids de l'élément $\omega\,ds$ du fil étant $p\omega\,ds$, nous devrons supposer $\eta = p$, et nous aurons, en posant $\frac{p}{K} = \frac{1}{a}$,

$$Q = e^{-\frac{s}{a}},$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right), \tag{6}$$

$$dx = \frac{2\,ds}{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}} = \frac{2e^{\frac{s}{a}}\,ds}{e^{\frac{2s}{a}}+1},$$

$$x = 2a\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{s}{a} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{7}$$

puis

$$y = \int\sqrt{1-\frac{dx^2}{ds^2}}\,ds = y_0 + \int_0^s \sqrt{1 - \frac{4e^{\frac{s}{a}}}{\left(e^{\frac{2s}{a}}+1\right)^2}}\,ds$$

$$= y_0 + \int_0^s \frac{e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}}}{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}\,ds$$

ou, en prenant $y_0 = a\log 2$,

$$y = a\log\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right), \tag{8}$$

et le problème se trouve résolu.

Supposons maintenant que $\eta\,ds$ soit de la forme $p\,dx$, p étant une constante;

[illegible] pour les équations cher-

$$[illegible] = 0,$$

$$[illegible] = 0,$$

$$[illegible] = 0.$$

[illegible] généralité, sont trop com-
[illegible] nous bornerons-nous à
[illegible] dans un plan xOy.

[illegible] suivant la tangente
[illegible] et le
[illegible] rayon de courbure;

[illegible]

$$[illegible] \quad \frac{x}{a} \quad [illegible] \quad -\frac{x}{a},$$

[illegible] ériennés.

Nous pouvons prendre pour les équations du mouvement

$$\frac{\partial T}{\partial s} + \mu(\Phi - \varphi) = 0,$$

$$T\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \mu(\Psi - \psi) = 0,$$

d'où, par l'élimination de T,

$$(\Psi - \psi)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} + (\Phi - \varphi)\frac{\partial \alpha^2}{\partial s^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}(\Psi - \psi) = 0.$$

Nous avons

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= v\cos\alpha - u\sin\alpha, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= v\sin\alpha + u\cos\alpha, \end{aligned} \right.$$

$$\varphi = \frac{\partial(v\cos\alpha - u\sin\alpha)}{\partial t}\cos\alpha + \frac{\partial(v\sin\alpha + u\cos\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

$$\psi = -\frac{\partial(v\cos\alpha - u\sin\alpha)}{\partial t}\sin\alpha + \frac{\partial(v\sin\alpha + u\cos\alpha)}{\partial t}\cos\alpha = \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

et l'équation précédente devient

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\Psi - \frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} + \left(\Phi - \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha^2}{\partial s^2} \\ &\qquad - \frac{\partial \alpha}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\Psi - \frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

En différentiant les équations (a) par rapport à s, on obtient

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\cos\alpha - v\sin\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s}\sin\alpha - u\cos\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \sin\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\sin\alpha + v\cos\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s}\cos\alpha - u\sin\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial s}.$$

En ajoutant ces dernières équations multipliées par $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, puis par $-\sin\alpha$, $\cos\alpha$, on trouve

$$(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial s} - u\frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} + v\frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) entre les inconnues u, v, α et les variables s et t seront celles du mouvement.

Ces équations sont trop compliquées pour qu'on puisse en tirer parti, même dans les cas les plus simples, comme nous allons le faire voir par un exemple. Nous supposerons que Ψ et Φ sont des fonctions données de α, que le fil étant en équilibre on l'écarte très peu de sa position et qu'on imprime ensuite à ses éléments de très petites vitesses en l'abandonnant ensuite à lui-même. Le mouvement du fil restera toujours très petit. Nous admettrons que l'angle α se rapporte à l'équilibre, qu'à l'état de mouvement il devienne $\alpha + \varepsilon$, et nous négligerons les termes du second ordre en ε, u, v. Les équations ci-dessus deviendront

$$\left(\frac{d\Psi}{d\alpha}\varepsilon - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \Psi\frac{\partial^2\varepsilon}{ds^2} + \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\varepsilon - \frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{d\alpha^2}{ds^2}$$
$$+ 2\Phi\frac{d\alpha}{ds}\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} - \frac{d\alpha}{ds}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{d\Psi}{d\alpha}\varepsilon - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{d\Psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} - u\frac{d\alpha}{ds} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + v\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0.$$

Dans le cas de la chaînette on a

$$\Psi = -g\cos\alpha, \qquad \Phi = -g\sin\alpha,$$
$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos^2\alpha}{a}, \qquad \frac{d^2\alpha}{ds^2} = -\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^2},$$

et, en substituant α à la variable s,

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\cos^2\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{\cos^3\alpha}{a^2}\left(-2\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right).$$

Les équations précédentes deviennent alors

$$g\cos^2\alpha\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\alpha^2} + g\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} + g(1 + \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\varepsilon$$
$$- \cos\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial t} - 2\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \cos\alpha\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial\alpha}, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + v\right)\frac{\cos^2\alpha}{a} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0.$$

En éliminant u entre ces trois équations, il vient

$$g\cos^2\alpha\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}+g\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+g(1+\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)\varepsilon$$
$$-\cos\alpha\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial t}-2\sin\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}+\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\right)\frac{\cos^2\alpha}{a}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=0.$$

Il paraît impossible d'intégrer ces deux équations; mais, si le fil est assez tendu pour qu'on puisse considérer l'angle α comme étant du même ordre de grandeur que ε et v, on a

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\varepsilon-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial t}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v-a\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=0,$$

équations linéaires aux différentielles partielles à coefficients constants, et auxquelles on essayera de satisfaire en employant les méthodes connues.

CHAPITRE VI.

DYNAMIQUE.

§ I. — Équations générales de la Dynamique. Systèmes à liaisons.

72. Considérons un système matériel dont les molécules m, m_1, m_2, ... sont en mouvement. Nous supposerons qu'un certain nombre de ces molécules peuvent être assujetties à rester sur des lignes ou surfaces fixes ou mobiles, dont par conséquent les équations pourront renfermer le temps.

Soient, à l'instant t, x_i, y_i, z_i les coordonnées de la molécule m_i; $\overline{X_i} + \overline{Y_i} + \overline{Z_i}$ la résultante de la force extérieure qui agit sur m_i, de la réaction de la ligne ou surface sur laquelle se trouve cette molécule, des actions attractives ou répulsives dues aux autres molécules du système.

On a

$$X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0, \qquad Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \qquad Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0,$$

en désignant par $\overline{\delta x_i} + \overline{\delta y_i} + \overline{\delta z_i}$ un déplacement arbitraire de m_i. Ces équations sont comprises dans la suivante

$$\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right) \delta z_i = 0.$$

En faisant la somme des équations semblables établies pour toutes les molécules, il vient

$$(1) \quad \sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z \right] = 0.$$

Si les déplacements virtuels sont pris sur les lignes et surfaces considérées comme fixes à l'instant t, les réactions de ces lignes ou surfaces disparaissent dans l'équation ci-dessus.

Dans le cas où les lignes et surfaces sont absolument fixes, nous pourrons prendre pour les déplacements δ les déplacements effectifs d, et nous aurons

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

ou

$$\frac{1}{2}d\Sigma m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Soient V_{0i}, V_i la vitesse initiale et la vitesse à l'instant t de m_i, l'expression $\Sigma m V^2$ est ce qu'on appelle la *force vive du système à l'instant t*. En intégrant, on obtient

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}(\Sigma m V^2 - \Sigma m V_0^2) = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

ce qui exprime que : le *demi-accroissement de la force vive est égal au travail des forces extérieures et moléculaires.*

Si le système matériel est composé de corps solides réagissant les uns sur les autres, le travail des actions moléculaires est nul dans chaque corps, et il ne reste que le travail des actions moléculaires des corps en contact, c'est-à-dire des frottements dont on continuera à faire abstraction.

L'équation (2) ne sera utile, au point de vue analytique, que si $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est la différentielle d'une fonction des x_i, y_i, z_i, et il suffit qu'il en soit ainsi pour les forces extérieures, puisque le travail élémentaire des forces moléculaires est une différentielle exacte. Soient Ψ cette fonction dite *des forces* ou appelée *potentiel;* $h = \Sigma m V_0^2 - 2\Psi_0$. On a

$$(3) \qquad \Sigma m V^2 = 2\Psi + h$$

et (n° 47)

$$(4) \qquad X = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad \ldots.$$

Soient χ, η, ζ les coordonnées du centre de masse G du

système par rapport à Ox, Oy, Oz; Gx', Gy', Gz' trois axes parallèles à Ox, Oy, Oz. On a

$$\begin{aligned}\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\\ =\Sigma m\left(\frac{dx'^2}{dt^2}+\frac{dy'^2}{dt^2}+\frac{dz'^2}{dt^2}\right)+\left(\frac{d\chi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\Sigma m\\ +2\frac{d\chi}{dt^2}\Sigma m\frac{dx'}{dt}+2\frac{d\eta}{dt}\Sigma m\frac{dy'}{dt}+2\frac{d\zeta}{dt}\Sigma m\frac{dz'}{dt};\end{aligned}$$

or les trois derniers termes de cette expression sont nuls. Donc *la force vive du système est égale à la force vive dans son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité augmentée de la force vive de ce centre où toute la masse serait concentrée* (théorème de Kœnig).

73. *Systèmes à liaisons.* — Soient n le nombre des points matériels m_i; $k<3n$ le nombre des équations des lignes et surfaces fixes ou mobiles.

Pour les mêmes motifs que ceux que nous avons donnés au n° **47**, nous admettrons que, en même temps que t, les équations de liaisons

$$(5)\qquad L_1=0,\quad L_2=0,\quad \ldots,\quad L_k=0$$

peuvent renfermer toutes les coordonnées.

Nous ne considérerons que des déplacements virtuels sur les lignes et surfaces considérées comme fixes à l'instant t ou, suivant l'expression admise, *compatibles avec les liaisons*. Comme l'équation $L_i=0$ doit être satisfaite par les $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $x_1+\delta x_1$, ..., on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial L_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial L_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial L_1}{\partial x}\delta x_1+\ldots=0,\\ &\frac{\partial L_2}{\partial x}\delta x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{\partial L_k}{\partial x}\delta x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0.\end{aligned}\right.$$

En portant dans l'équation (1), k des variations δ déduites

des équations (6), en fonction des $3n - k$ autres, et égalant à zéro des coefficients de ces derniers, on obtiendra $3n - k$ équations entre les x_i, y_i, z_i qui, jointes à (5), donneront $3n$ équations entre les $3n$ coordonnées et t. Ces dernières, qui sont du second ordre, seront les *équations différentielles* du mouvement et permettront de déterminer, si faire se peut, les coordonnées en fonction du temps.

Dans ce qui suit, nous ne ferons que reproduire rapidement la marche suivie au n° 47.

En ajoutant l'équation (1) aux équations (6) respectivement multipliées par les coefficients indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ et égalant à zéro les coefficients des déplacements, on obtient les équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} X - m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2\dfrac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots = 0, \\ Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial y} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial z} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ X_1 - m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Sur ces $3n$ équations, k d'entre elles permettront d'obtenir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, et, en portant leurs valeurs dans les autres, on obtiendra $3n - k$ qui, jointes à (5), permettront de déterminer les $3n$ coordonnées en fonction de t.

On peut supposer qu'on n'ait que $3n - k$ équations entre autant de coordonnées, les autres coordonnées ayant été éliminées au moyen de (5). L'intégration de ces $3n - k$ équations, qui sont du second ordre, introduira $2(3n - k)$ constantes, qu'on déterminera par les conditions que les coordonnées restantes et leurs dérivées par rapport au temps aient des valeurs données pour $t = 0$; c'est ce qu'on appelle les *conditions initiales du mouvement*. Le problème étant censé résolu, les λ_i seront déterminés.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit au n° 47 sur les forces de liaisons.

74. *Équations* (dues à Lagrange), *en coordonnées quelconques, du mouvement d'un système de liaisons.* — Soit ν le nombre des coordonnées indépendantes qu'on peut supposer exprimées en fonction de t et de ν autres variables u, $u_1, \ldots, u_{\nu-1}$.

Posant

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad y'_i = \frac{dy_i}{dt}, \qquad z'_i = \frac{dz_i}{dt} \qquad \text{et} \qquad u'_i = \frac{du_i}{dt},$$

l'équation (1) deviendra

$$\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}\delta x + \frac{dy'}{dt}\delta y + \frac{dz'}{dt}\delta z\right) = \Sigma(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z).$$

Le second membre de cette équation sera de la forme

$$\mathrm{U}\,\delta u + \mathrm{U}_1\,\delta u_1 + \ldots;$$

d'autre part,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial u_1}\delta u_1 + \ldots, \qquad \delta y = \ldots, \qquad \delta z = \ldots;$$

en substituant et identifiant les termes en δu_i, on obtient

$$\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{dy'}{dt}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{dz'}{dt}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \mathrm{U}$$

ou

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial y}{\partial u} + z'\frac{\partial z}{\partial u}\right) \\ &\quad - \Sigma m\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial u} + z'\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \mathrm{U}. \end{aligned}\right.$$

On a

$$(b) \qquad x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial u_1}u'_1 + \ldots, \qquad y' = \ldots, \qquad z' = \ldots.$$

d'où

$$(c) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u'}, \qquad \ldots.$$

D'ailleurs

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial u} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u}u' + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u_1}u'_1 + \ldots, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial u} = \ldots, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial u} = \ldots$$

[illegible] $= \frac{\partial z'}{\partial u}$.

[illegible] a) devient

[illegible] $\frac{\partial z'}{\partial u} - z' \frac{\partial z'}{\partial u}\Big) = U$.

[illegible]

[illegible] les valeurs (b), [illegible] écédente peut

[illegible] e même

[illegible]

[illegible] e t et les incon-

[illegible] la différentielle

[illegible] t renfermer le

[illegible] $u_1 + \ldots$

[illegible] tient

[illegible]

[illegible] es [illegible] era que si Ψ est

[illegible]

[illegible] ces équations, basée

75. *Applications des équations de Lagrange au pendule conique.* — Soient

Oz la verticale du point de suspension O;
xOy le plan horizontal en O;
$Om = l$ la position du pendule à l'instant θ;
φ l'angle du plan zOm avec le plan zOx;
θ l'angle de Om avec Oz.

On a

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \quad y = l\sin\theta\sin\varphi, \quad z = l\cos\theta, \quad u = 0, \quad u_1 = \varphi,$$

$$\Psi = gl\cos\theta, \qquad T = \frac{l^2}{2}(\theta'^2 + \sin^2\varphi'^2).$$

Les équations (8) donnent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\theta'} - \frac{\partial T}{\partial\theta} + gl\sin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\varphi'} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi'} = \text{const. C}.$$

Or

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = l^2\theta' = l^2\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\theta} = l^2\sin\theta\cos\theta\varphi'^2 = l^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'} = l^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt};$$

par suite

$$(a) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

$$(b) \qquad l^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = C.$$

Soient $\mu^2 = \frac{g}{l}$ et v_0 la vitesse de m correspondant à un maximum θ_0 de θ; puis $\frac{v_0^2}{l^2} = 2k^2\omega^2$, d'où $v_0 = \mu\omega l\sqrt{2}$. On a

$$C = v_0 l\sin\theta_0 = \mu\omega l^2\sin\theta_0,$$

et (b) devient

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu\omega\sqrt{2}\sin\theta_0}{\sin^2\theta}.$$

En portant cette valeur dans (a), on obtient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mu^2\left(2\omega^2\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^3\theta}\cos\theta - \sin\theta\right).$$

En multipliant par $d\theta$ et intégrant entre θ_0 et θ, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta^2}{dt^2} = \mu^2\left[\frac{\omega^2}{\sin^2\theta}(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) - \cos\theta + \cos\theta_0\right];$$

d'où

$$dt = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[\cos^2\theta + \omega^2(\cos\theta + \cos\theta_0) - 1\right]}},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons obtenu au n° 39.

Nous renverrons aux n°s 3 et 33 du Tome VII pour d'autres applications des équations de Lagrange.

76. *Extension des équations de Lagrange au mouvement relatif.* — Soient

Ox, Oy, Oz trois axes fixes dans un système invariable mobile (S), auxquels on rapportera le mouvement d'un système matériel à liaisons $(m, m_1, \ldots)$;

W, Φ la vitesse et l'accélération du point O;

n, p, q les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée de (S);

V_i, φ_i la vitesse et l'accélération absolues de m_i ou (x_i, y_i, z_i);

$\overline{\chi_i} = \overline{V_i} - \overline{W}$ la vitesse relative de m_i par rapport à O;

$X_i = m_i\varphi_{ix}$, $Y_i = \ldots$, $Z_i = \ldots$ les composantes de la force qui sollicite m_i et qui sont censées des fonctions de coordonnées et de t.

On a

$$V_x = W_x + pz - qy + \frac{dx}{dt}$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \chi_x &= \frac{dx}{dt} + pz - qy \qquad \text{et de même} \\ \chi_y &= \frac{dy}{dt} + qx - nz, \\ \chi_z &= \frac{dz}{dt} + ny - px. \end{aligned}\right.$$

Concevons qu'on imprime, à tout ce que l'espace renferme, un mouvement $(-W, -\Phi)$ égal et contraire à celui du point O qui sera ramené au repos; il en résultera un espace fictif (E) dans lequel la vitesse et l'accélération absolues de m seront χ et $\bar{\varphi} - \bar{\Phi}$. Le point m sera, dans ces conditions, sollicité par la force dont les composantes seront

$$(2) \qquad X' = X - m\varphi_x, \qquad Y' = \ldots, \qquad Z' = \ldots.$$

Mais alors les équations de Lagrange sont applicables au mouvement de Σm, rapporté aux axes Ox, Oy, Oz considérés comme fixes dans (E). Si donc l'on pose

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2}\Sigma m(\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2), \\ \Sigma(X'\,dx + Y'\,dy + Z'\,dz) = U'\,du + U'_1\,du_1, \end{array} \right.$$

on aura

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial u'} - \frac{\partial T'}{\partial u} = U', \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial u'_1} - \frac{\partial T'}{\partial u_1} = U'_1, \qquad \ldots.$$

Les équations (4) sont dues à E. Bour [1], mais la démonstration que nous venons d'en donner est empruntée à Ph. Gilbert.

Les équations ne seront applicables que dans un nombre restreint de cas, car, en général, les forces extérieures ne pourront pas dériver d'un potentiel des coordonnées relatives. Nous nous bornerons à en tirer une vérification du théorème de Coriolis.

Nous supposerons égale à l'unité la masse du point en mouvement relatif. Les variables indépendantes sont ici x, y, z; les équations (1) donnent

$$\begin{aligned} \chi_x &= x' + pz - qy, \\ \chi_y &= y' + qx - nz, \\ \chi_z &= z' + ny - px, \end{aligned}$$

---

[1] La démonstration de Bour, quelque peu simplifiée, a été reproduite dans une Note placée à la fin du Tome VII.

et l'on a

$$\begin{aligned}
T' = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + x'(pz - qy) + y'(qx - nz) + z'(ny - px \\
+ \frac{n^2}{2}(y^2 + z^2) + \frac{p^2}{2}(z^2 + x^2) + \frac{q^2}{2}(x^2 + y^2) \\
- pq\,zy - nq\,xz - pn\,xy,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} = x' + pz - qy,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial x'} = \varphi_{rx} + pV_{rz} - qV_{ry} + z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt},$$

$$\frac{\partial T'}{\partial x} = qV_{ry} - pV_{rz} + (p^2 + y^2)x - nqz - pny,$$

$$X'dx + Y'dy + Z'dz = (\varphi_x - \Phi_x)\,dx + \ldots,$$

et la première des équations (4) donne

$$\begin{aligned}
\varphi_x = \varphi_{rx} + \Phi_x - (p^2 + y^2)x + z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} \\
+ n(qz + py) + 2(pV_{rz} - qV_{ry}),
\end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait établir.

Nota. — Nous renverrons, pour ce qui concerne le principe de la moindre action et ses applications, au n° 34 du Tome VII.

77. *Théorème de Gauss.* — Soient, à l'instant t,

A la position d'une molécule m d'un système à liaisons;
V sa vitesse;
F la résultante des forces extérieures et moléculaires qui la sollicitent;
f sa force de liaison;
$\overline{AA'}$ le chemin parcouru par la molécule dans le temps dt;
$\overline{AA'_1}$ celui qui serait décrit sous l'action de F, en supprimant les liaisons;
(x, y, z), (x', y', z'), (x'_1, y'_1, z'_1) les coordonnées de A, A', A'_1.

On a

$$m(x'-x) = mV_x\,dt + (F_x + f_x)\frac{dt^2}{2},$$

$$m(x'_1 - x) = mV_x\,dt + F_x\frac{dt^2}{2};$$

d'où

$$x' - x'_1 = \frac{f_x\,dt^2}{2m} \quad \text{et de même} \quad y' - y'_1 = \frac{f_y\,dt^2}{2m}, \quad z' - z'_1 = \frac{f_z\,dt^2}{2m},$$

par suite

$$\overline{A'A'_1} = f\frac{dt^2}{2m}, \tag{1}$$

et $\overline{A'A'_1}$ est la direction de f.

Soit $\overline{AB}$ un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons.

La somme des travaux virtuels des f, relatifs aux AA', AB, étant nulle, il en est de même pour $\overline{A'B} = \overline{AB} - \overline{AA'}$, et l'on a ainsi

$$\Sigma f.A'B\cos\widehat{BA'A'_1} = 0,$$

ou, par l'élimination de f au moyen de (1),

$$\Sigma m\overline{A'A'_1}.\overline{A'B}\cos\widehat{BA'A'_1} = 0.$$

En multipliant par m la relation

$$\overline{A'_1B}^2 = \overline{A'A'_1}^2 + \overline{A'B}^2 - 2\overline{A'A'_1}\,\overline{A'B}\cos\widehat{BA'A'_1},$$

faisant la somme pour toutes les masses élémentaires, on obtient, en ayant égard à (2),

$$\Sigma m\overline{A'_1B}^2 = \Sigma m\overline{A'A'_1}^2 + \Sigma m\overline{A'B}^2;$$

d'où

$$\Sigma m\overline{A'A'_1}^2 < \Sigma m\overline{A'_1B}^2.$$

Donc *la somme des produits des masses, chacune par le carré de la distance de la position qu'elle occupe au bout de dt à la position qu'elle occuperait s'il n'y avait pas de liaisons, est plus petite que la somme semblable obtenue en substituant*

aux déplacements réels tout système de déplacements virtuels compatibles avec les liaisons.

La première somme est donc un minimum.

78. *Stabilité de l'équilibre d'un système à liaisons* $(m, m', m'', \ldots)$ *lorsque les forces dérivent d'un potentiel* U. — La condition d'équilibre $\Sigma(X\,\delta z + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0$ revient à

$$\delta U = 0,$$

ce qui exprime que les coordonnées (x, y, z), (x', y', z'), ... des positions de m, m' qui se rapportent à l'équilibre rendent le potentiel maximum ou minimum.

La stabilité de l'équilibre consiste en ce que, si l'on fait subir aux points matériels m, m', ... des déplacements aussi petits qu'on voudra et qu'on leur imprime ensuite des vitesses v_0, v'_0, ..., également aussi petites qu'on voudra, les déplacements restent toujours très petits.

Supposons que les coordonnées soient exprimées au moyen de variables indépendantes u, u', ... Nous allons démontrer que, si $U = F(u, u', \ldots)$ est un maximum, l'équilibre est stable.

Soient a, a', ... un système de valeurs qui rendent U maximum; à l'instant t, $u = a + \chi$, $u' = a' + \chi'$, et de plus v, v', ... les vitesses de m, m', ...

La valeur de la fonction

$$F(a + \chi, a' + \chi', \ldots) - F(a, a', \ldots) = -\varphi(\chi, \chi', \ldots)$$

sera négative pour des valeurs de χ, χ', ... respectivement comprises entre certaines limites $\pm h$, $\pm h'$, ...

Nous affecterons de l'indice o toutes les quantités qui se rapportent à l'instant initial : l'équation de la force vive nous donnera

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \varphi(\chi_0, \chi'_0, \ldots) - \varphi(\chi, \chi', \ldots).$$

Faisons maintenant et successivement dans $\varphi(\chi, \chi', \ldots)$

$\chi = h$, et faisons varier χ' entre $-h'$, h'; χ'' entre $-h''$ et h'', etc.
$\chi = -h$, id.

Parmi toutes les valeurs que prendra $\varphi(\chi, \ldots)$, il y en aura une, A, plus petite que toutes les autres. En opérant de même pour $\chi' = \pm h'$, on obtiendra une plus petite valeur A′ de $\varphi(\chi, \ldots)$, etc. Désignant par B la plus petite des valeurs A, A′, ... et posant

$$C = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \varphi(\chi_0, \ldots),$$

l'équation de la force vive revient à

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = -(B - C) + B - \varphi(\chi, \chi', \ldots).$$

Mais on peut prendre les v_0 et les χ_0, en valeur absolue, assez petits pour que $C < B$. Si donc, au bout d'un certain temps, une ou plusieurs des variables χ atteignaient leurs limites, on aurait $B - \varphi(\chi, \ldots) < 0$ et, par suite, $\Sigma m v^2 < 0$, ce qui est absurde. Donc les valeurs $\sqrt{\chi^2}$, $\sqrt{\chi'^2}$, ... ne peuvent pas croître avec le temps de manière à dépasser certaines limites; par suite l'équilibre est stable.

Considérons, par exemple, un système articulé composé de corps pesants; soient M sa masse, z la distance de son centre de gravité à un plan horizontal fixe. On a $U = Mgz$, et l'équilibre sera stable lorsque, suivant l'expression admise, le centre de gravité sera le plus bas possible.

79. *Des petits mouvements d'un système matériel à liaisons* $(m, m', \ldots)$, *lorsque les forces dérivent d'un potentiel* U. — On a d'abord

$$(1) \qquad \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \delta U,$$

et l'on supposera les coordonnées exprimées au moyen de ν variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$.

Supposons que, le système étant d'abord en équilibre stable, on fasse subir à ses molécules de petits déplacements, puis qu'on leur imprime de petites vitesses. Chaque molécule exécutera par rapport à sa position d'équilibre un petit mouvement, et ce sont ces mouvements que nous allons étudier.

Soient, pour l'équilibre,

(x_0, y_0, z_0), (x'_0, y'_0, z'_0), ... les valeurs de (x, y, z), (x', y', z');
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les valeurs correspondantes de $u_1, u_2, \ldots$;

enfin $u_1 = \alpha_1 + \chi_1$, $u_2 = \alpha_2 + \chi_2$, ... les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$ qui répondent à un instant quelconque t, les χ_i étant censés assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés.

On a, par exemple,

$$\begin{aligned} x = f(u_1, u_2, \ldots) &= f(\alpha_1 + \chi_1, \alpha_2 + \chi_2 + \ldots) \\ &= f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\chi_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\chi_2 + \ldots, \end{aligned}$$

ou, en désignant par a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i, ... des constantes connues,

$$(2) \quad \begin{cases} x = x_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots, \\ y = y_0 + b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + \ldots, \\ z = z_0 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \ldots, \\ x' = x'_0 + a'_1\chi_1 + a'_2\chi_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On déduit de là

$$(2') \quad \begin{cases} \delta x = a_1\delta\chi_1 + a_2\delta\chi_2 + \ldots, \quad \delta y = \ldots, \quad \delta z = \ldots, \quad \delta x' = \ldots, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = a_1\dfrac{d^2\chi_1}{dt^2} + a_2\dfrac{d^2\chi_2}{dt^2} + \ldots, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ldots. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$(3) \quad \begin{cases} \left(A_1\dfrac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{1,2}\dfrac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{1,3}\dfrac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots\right)\delta\chi_1 \\ \quad + \left(A_{2,1}\dfrac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_2\dfrac{d^2\chi_2}{dt^2} + \ldots\right)\delta\chi_2 + \ldots = \delta U, \end{cases}$$

en posant

$$\begin{aligned} A_1 &= m(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + m'(a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2) + \ldots, \\ A_{1,2} &= m(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + m'(a'_1a'_2 + b'_1b'_2 + c'_1c'_2) + \ldots, \end{aligned}$$

et, en général,

$$(4) \quad \begin{cases} A_i = \Sigma m(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2), \\ A_{ij} = A_{ji} = \Sigma m(a_ia_j + b_ib_j + c_ic_j). \end{cases}$$

Si l'on développe $U(\alpha_1 + \chi_1, \alpha_2 + \chi_2, \ldots)$ suivant les puis-

sances de χ_i, le second terme du développement sera nul, en raison de l'équilibre initial, et, en s'arrêtant aux termes du second ordre, on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &U(\alpha_1+\chi_1, \alpha_2+\chi_2, \ldots) - U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2}\chi_1^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2}\chi_2^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_2\chi_1 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\chi_3\chi_1 + \ldots\right), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2}\chi_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\chi_3 + \ldots\right)\delta\chi_1 + \ldots.$$

L'équation (3) donne, par suite, en identifiant les coefficients des $\delta\chi_i$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &A_1 \frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{1,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{1,3}\frac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2}\chi_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\chi_3 + \ldots, \\ &A_{2,1}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_2 \frac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{2,3}\frac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}\chi_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2}\chi_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\chi_3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En désignant par ρ, ε, h_i des constantes, si l'on substitue

$$(7)\qquad \chi_i = h_i \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon)$$

dans les équations (6), on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho(A_1 h_1 + A_{1,2}h_2 + \ldots) + \frac{d^2 U}{\partial \alpha_1^2}h_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}h_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}h_3 + \ldots = 0, \\ &\rho(A_{2,1}h_1 + A_2 h_2 + \ldots) + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}h_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2}h_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}h_3 + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En éliminant entre ces équations les $\nu - 1$ rapports $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \ldots$, on obtiendra une équation en ρ du degré ν, dont toutes les racines doivent être réelles, positives et inégales, car autrement les χ_i renfermeraient des exponentielles, c'est-à-dire des termes croissant avec le temps. Alors les déplacements ne resteraient plus très petits, et l'équilibre, contrairement à ce qu'on a supposé, ne serait pas stable. A chaque valeur de ρ correspondra un système de valeurs déterminées de

$\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \ldots$ et deux arbitraires h_1, ε. Soient ρ, ρ', ... les racines de l'équation; si l'on accentue de la même manière les constantes correspondantes, on aura

$$(9)\quad \begin{cases} \chi_1 = h_1 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon) + h'_1 \sin\sqrt{\rho'}\,(t+\varepsilon') + \ldots, \\ \chi_2 = h_2 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon) + h'_2 \sin\sqrt{\rho'}\,(t+\varepsilon') + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cette solution, renfermant les 2ν constantes arbitraires h_1, $h'_1, \ldots, \varepsilon, \varepsilon', \ldots$, sera la solution générale des équations (6). Les arbitraires se détermineront par les conditions que les χ_i, $\frac{d\chi_i}{dt}$ aient des valeurs données pour $t = 0$.

Supposons que les valeurs initiales des χ_i, $\frac{d\chi_i}{dt}$ soient deux sommes algébriques dont on fera correspondre les éléments de l'une à l'autre somme. Il est évident que χ_i sera la somme des valeurs (9) établies pour chaque couple de valeurs initiales. Les petits mouvements s'ajoutent, et l'on a ce qu'on appelle le *principe de la superposition des petits mouvements.*

Stabilité de l'équilibre. — Si dans l'expression de la demi-force vive $\frac{1}{2}\Sigma m \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ on substitue aux coordonnées leurs valeurs (2) et qu'on ait égard aux notations (4), on trouve

$$\frac{1}{2}\sum\left(A_i \frac{d^2\chi_i}{dt^2} + 2A_{ij}\frac{d\chi_i}{dt}\frac{d\chi_j}{dt}\right).$$

En faisant $h_i = \frac{d\chi_i}{dt}$ dans cette expression, on a pour résultat

$$H = \frac{1}{2}\Sigma(A_i h_i^2 + 2A_i A_j h_i h_j).$$

Le second membre de l'équation (5) devient, en y faisant $\chi_i = h_i$,

$$P = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_i^2} h_i^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} h_i h_j\right).$$

Les équations (8) peuvent se mettre sous la forme

$$\rho \frac{\partial H}{\partial h_1} + \frac{\partial P}{\partial h_1} = 0,$$
$$\rho \frac{\partial H}{\partial h_2} + \frac{\partial P}{\partial h_2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$\rho \sum \frac{\partial H}{\partial h_i} h_i + \sum \frac{\partial P}{\partial h_i} = 0.$$

Comme H, P sont deux fonctions homogènes du second degré des h_i, on a

$$\sum \frac{\partial H}{\partial h_i} h_i = 2H, \qquad \sum \frac{\partial P}{\partial h_i} h_i = 2P,$$

par suite

$$\rho = -\frac{P}{H}.$$

A des valeurs réelles de ρ doivent correspondre des valeurs réelles des h_i. Par sa nature H est positif; pour que les valeurs de ρ soient positives, il faut que P soit négatif et, par suite, qu'il en soit de même de l'expression (5), puisque χ_i est de même ordre de grandeur que h_i. Il suit de là que, pour que les intégrales (7) soient admissibles, il faut que $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ soit un maximum, ce qui est conforme à ce que l'on a vu précédemment.

Si $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ est minimum, les valeurs de ρ sont négatives, c'est-à-dire que les χ_i seront représentés par des sommes d'exponentielles du temps et ne pourront, par suite, rester très petits. L'équilibre sera donc instable.

80. *Mouvement d'un système à liaisons* $(m, m_1, \ldots)$ *lorsque les forces extérieures et moléculaires ont une telle intensité que, à la fin d'un intervalle très court* $t - t_0$, *elles ont produit des variations notables dans les vitesses.* — Pendant la durée $t - t_0$, les points m_i ne changent pas sensiblement de position, et x_i, y_i, z_i peuvent être considérés comme constants. Les k variations dépendantes, déduites de

$$(1) \quad \frac{\partial L_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_1}{\partial y}\delta y + \ldots = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial L_k}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_k}{\partial y}\delta y + \ldots = 0,$$

[illegible] efficients con-
[illegible] considérées, de
[illegible] me constantes.

[illegible] $\delta x + \ldots \Big] = 0$

[illegible] $+ \{\ldots\} \delta z \Big) = 0.$

[illegible] nstants t_0, t;

[illegible]

[illegible] $\delta z \Big] = 0.$

[illegible] *quantités de*
[illegible] *quilibre.*

[illegible]

[illegible] et de même

[illegible] alant à zéro les
[illegible] équations qui,
[illegible] déterminer les

§ II. — Du mouvement d'un système libre.

81. On peut faire telle hypothèse que l'on voudra sur les déplacements virtuels des éléments du système ($m, m', m'', \ldots$), parmi lesquels nous considérons ceux qui sont compatibles avec la solidité. Les actions moléculaires disparaîtront dans l'équation

$$\sum\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \ldots\right] = 0,$$

où il ne restera que les forces extérieures.

Le déplacement d'un solide se compose d'un déplacement translatoire et d'un déplacement gyratoire autour d'un axe passant par l'origine O des coordonnées; mais, chacune de ces dernières étant arbitraire, il suffit de les considérer isolément.

Équations de translation. — Le déplacement translatoire étant arbitraire, on peut supposer successivement $\delta x = \text{const.}$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$; $\delta x = 0$, $\delta y = \text{const.}$, $\delta z = 0$; $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = \text{const.}$; par suite

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,\\ &\sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,\\ &\sum\left(Z - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

équations qu'on obtient immédiatement en ajoutant les équations, relatives à Ox, Oy, Oz, des molécules $m, m', \ldots$ considérées isolément.

Soit (x_1, y_1, z_1) le centre de gravité de la masse totale M; on a, par exemple, $\Sigma m x = M x_1$, $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{d^2x_1}{dt^2}$, et les équations (1) deviennent

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Donc : le *centre de gravité se meut comme un point matériel*

où toute la masse serait concentrée et auquel seraient appliquées les forces extérieures.

On comprend ainsi pourquoi antérieurement on a supposé, dans certains problèmes, que des corps de dimensions finies étaient réduits à des points matériels.

Corollaire I. — Si le système $(m, m', \ldots)$ n'est soumis qu'à ses actions mutuelles on a $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \ldots$, et le centre de gravité est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Exemples : 1° système solaire, abstraction faite des attractions des astres qui lui sont étrangers; 2° le centre de gravité d'un canon, de sa charge et du projectile, reste immobile quand le coup part, quand même la pièce éclate.

Corollaire II. — On déduit de l'équation (2)

$$M\left[\frac{dx_1}{dt} - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0\right] = \sum \int_0^t X\,dt, \qquad \ldots;$$

donc, en projection sur un axe :

1° L'accroissement de la quantité de mouvement du centre de gravité est égal à l'impulsion des forces extérieures;

2° La quantité de mouvement gagnée par le centre de gravité est représentée en grandeur et en direction par l'impulsion des forces extérieures.

Équations de rotation. — La direction de l'axe du déplacement virtuel gyratoire $\delta\omega$ étant arbitraire, il suffira de la faire coïncider successivement avec les trois axes coordonnés Oz, Ox, Oy; on a, relativement à Oz,

$$\delta x = -y\,\delta\omega, \qquad \delta y = x\,\delta\omega,$$

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(Yx - Xy), \qquad \text{et de même} \\ &\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz - Zx), \\ &\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Zy - Yz). \end{aligned}\right.$$

Soient p, q les moments de la quantité de mouvement m et

de la force $\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$ par rapport à O; $\overline{P}=\overline{\Sigma p}$, $\overline{Q}=\overline{\Sigma q}$ les moments résultant des quantités de mouvement et des forces. La première des équations (2) peut s'écrire

$$(a) \qquad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma(Yx-Xy)$$

ou

$$\frac{d}{dt}\Sigma p_z=\Sigma q_z,$$

ou enfin

$$\frac{d}{dt}P_z=Q_z, \qquad \ldots.$$

Donc, *la vitesse de l'index des moments des quantités de mouvement représente en grandeur et en direction le moment des forces.*

Cas où la résultante des forces extérieures passe constamment par un point O. — On a $Q=0$, $\frac{dP_x}{dt}=0$, ... Ainsi, P_x, P_y, P_z sont des constantes et l'axe du moment des quantités de mouvement reste constant en grandeur et en direction.

Si a_z est l'aire décrite par le rayon vecteur On de la projection de m sur xOy, mesurée à partir d'une position déterminée de ce rayon, on a $\frac{x\,dy-y\,dx}{2}=a_z$, et l'équation ($a$) donne

$$\Sigma m\frac{da_z}{dt}=\text{const. } C_z,$$

ou, en mesurant les aires à partir de $t=0$,

$$\Sigma m a_z=C_z t.$$

Donc *la somme des produits des masses par les projections de leurs rayons vecteurs sur un plan quelconque croît proportionnellement au temps.*

Comme $C_z=\frac{P_z}{2}$, on a

$$\overline{C}=\overline{C_x}+\overline{C_y}+\overline{C_z}=\frac{P}{2}.$$

La quantité $\Sigma m \frac{da_z}{dt}$, par suite $\Sigma m a_z$ pour toute valeur de t, atteindra son maximum quand le plan de projection sera perpendiculaire à l'axe des moments des quantités de mouvement. Ce plan du maximum des aires a reçu de Laplace le nom de *plan invariable.*

82. *Forces qui produisent dans un temps très court des variations notables des vitesses.* — On peut considérer x, y, z comme restant constants entre o et t, et la première des équations (2) donne par l'intégration

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left\{x\left[\frac{dy}{dt}-\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right]-y\left[\frac{dx}{dt}-\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right]\right\} \\ &\quad=\sum\left(x\int_0^t \mathrm{Y}\,dt-y\int_0^t \mathrm{X}\,dt\right). \end{aligned}\right.$$

Donc : *en projection sur un plan, la somme des moments des quantités de mouvement est égale au moment des impulsions des forces.*

Si U est la vitesse perdue de m, on a

$$\Sigma[x(m\mathrm{U}_y+\int \mathrm{Y}\,dt)-y(m\mathrm{U}_x+\int \mathrm{X}\,dt)]=0, \qquad \ldots;$$

d'ailleurs

$$\Sigma(m\mathrm{U}_x+\int \mathrm{X}\,dt)=0, \qquad \ldots.$$

Donc *les quantités de mouvement perdues et les impulsions des forces se font fictivement équilibre sur le système considéré comme invariable.*

83. *Mouvement relatif d'un système matériel* $(m, m', m'', \ldots)$ *par rapport à un point mobile.* — Soient

α, β, γ les coordonnées du point mobile C;
$\mathrm{C}\chi$, $\mathrm{C}\eta$, $\mathrm{C}\zeta$ trois axes par ce point et parallèles aux axes fixes;
a, b, c les coordonnées du centre de gravité G de la masse totale M par rapport à $\mathrm{C}\chi$, $\mathrm{C}\eta$, $\mathrm{C}\zeta$.

On a $x=\chi+\alpha$, $y=\eta+\beta$, $z=\zeta+\gamma$, et les équations (1)

et (2) du numéro précédent deviennent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m\frac{d^2\chi}{dt^2}+M\frac{d^2\alpha}{dt^2}=X,\\ &\Sigma m\frac{d^2\eta}{dt^2}+M\frac{d^2\beta}{dt^2}=Y,\\ &\Sigma m\frac{d^2\zeta}{dt^2}+M\frac{d^2\gamma}{dt^2}=Z,\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}&\Sigma m\left(\chi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)+\alpha\left(\Sigma m\frac{d^2\eta}{dt^2}+M\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\\ &\quad-\beta\left(\Sigma m\frac{d^2\gamma}{dt^2}+M\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+M\left(a\frac{d^2\beta}{dt^2}-b\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\\ &\quad=\Sigma(Y\chi-X\eta)+\alpha\Sigma Y-\beta\Sigma Z,\end{aligned}$$

.....

Ces dernières équations, eu égard aux formules (1), se réduisent aux suivantes

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma m\left(\chi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)=\Sigma(Y\chi-X\eta)-M\left(a\frac{d^2\beta}{dt^2}-b\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Il résulte des équations (1) et (2) que *le mouvement relatif de* $(m, m', \ldots)$ *par rapport à* $C\chi$, $C\eta$, $C\zeta$ *est dû aux forces extérieures et à une force appliquée en* G, *égale au produit de la masse totale par l'accélération changée de sens du point* C.

On peut arriver immédiatement sans calcul à ce résultat. Concevons qu'on imprime au système une vitesse et une accélération égales et contraires à celles V, φ du point C, qui sera ramené au repos. Les forces $m\varphi$ se réduisent à la force $-M\varphi$ appliquée au centre de gravité.

Si C est le centre de gravité, on a $a=0$, $b=0$, $c=0$, $\Sigma m\frac{d^2\chi}{dt}=0$, ... Il suit de là que *le mouvement du système par rapport au centre de gravité est dû aux forces extérieures.*

84. *Mouvement d'un système matériel* $(m, m', \ldots)$ *dont les éléments ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles.* — C'est notamment le cas d'un groupe de corps célestes (abstraction

faite des attractions exercées par les autres corps célestes) dont la forme diffère peu de la sphère, dont les dimensions sont très petites par rapport à leurs distances mutuelles, et qui obéissent à la loi de la gravitation. On a vu, en effet, que les masses de ces corps pouvaient être considérées comme concentrées en leurs centres de gravité respectifs.

En nous reportant au n° 81, désignant par α, α', β, β', γ, γ', C_x, C_y, C_z des constantes et par $mm'f(r)$ l'action mutuelle de m et m', on a

$$(a) \qquad \Sigma mx = \alpha' t + \alpha, \qquad \Sigma my = \beta' t + \beta, \qquad \Sigma mz = \gamma' t + \gamma,$$

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C_z, \\ &\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = C_x, \\ &\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = C_y, \end{aligned} \right.$$

équations auxquelles on joindra celle de la force vive, savoir

$$(c) \qquad \frac{1}{2}\Sigma m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \int mm' f(r)\,dr.$$

Ce sont les seules intégrales générales des équations du mouvement qu'on puisse établir.

Soient χ, η, ζ les coordonnées du point m par rapport aux axes parallèles à Ox, Oy, Oz menés par le centre de gravité de la masse totale M. Aux équations (b) on peut substituer les suivantes, en désignant par D_χ, D_η, D_ζ des constantes,

$$(b') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma m\left(\chi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\chi}{dt}\right) = D_\zeta, \\ &\Sigma m\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) = D_\chi, \\ &\Sigma m\left(\zeta\frac{d\chi}{dt} - \chi\frac{d\zeta}{dt}\right) = D_\eta. \end{aligned} \right.$$

Nous examinerons les deux cas suivants :

1° *Un système se compose seulement de deux points m, m'.* — On a

$$(d) \qquad m\chi + m'\chi' = 0, \qquad m\eta + m'\eta' = 0, \qquad m\zeta + m'\zeta' = 0,$$

d'où

$$\frac{d\chi'}{dt} = -\frac{m}{m'}\frac{d\chi}{dt}, \qquad \frac{d\eta'}{dt} = \ldots, \qquad \frac{d\zeta'}{dt} = \ldots,$$

et les équations (b') deviennent

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} \chi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\chi}{dt} &= \frac{m'}{Mm}D\zeta, \\ \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt} &= \frac{m'}{Mm}D\chi, \\ \zeta\frac{d\chi}{dt} - \chi\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{m'}{Mm}D\eta, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(f) \qquad \zeta D\zeta + \chi D\chi + \eta D\eta = 0$$

et, par suite,

$$(f') \qquad \zeta' D\zeta + \chi' D\chi + \eta' D\eta = 0.$$

Il résulte de (f) et (f') que m, m' décrivent, par rapport à leur centre de gravité G, deux lignes comprises dans un même plan passant par ce centre; de (d) que ces deux lignes sont semblables par rapport à G. Si l'on fait coïncider $\chi G \eta$ avec le plan des orbites, il ne restera que la première des équations (e), à laquelle on devra joindre l'équation (c). Soient

$$f(r) = -\frac{1}{r^2}, \qquad \rho = mG = \frac{m'}{M}r, \qquad \sigma' = m'G = \frac{m}{M}r;$$

les accélérations de m, m' suivant mG, $m'G$ seront

$$\frac{m'}{r^2} = \frac{m'^3}{M^2\rho^2}, \qquad \frac{m}{r^2} = \frac{m^3}{M^2\rho^2}.$$

Donc m, m' décriront autour de G comme foyer deux ellipses semblables (problème dit des *deux corps*).

2° *Le système se compose de m, m', m''.* — Il faudra joindre aux équations (a), (b), (c) deux des équations du second ordre du mouvement des points considérés comme libres.

Si $f(r) = -\frac{1}{r^2}$, on retombe sur le problème dit *des trois corps*, qu'on n'a pu résoudre jusqu'ici que par approximation.

CHAPITRE VII.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

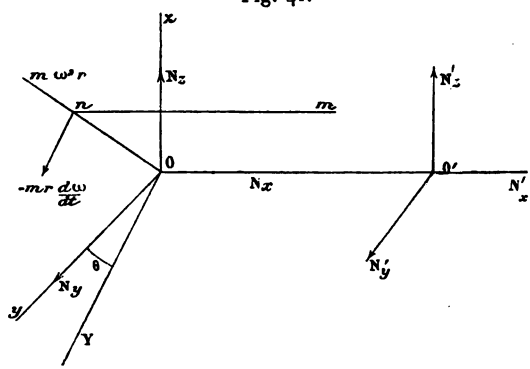
§ I. — Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.

85. Soient (*fig.* 41)

$a = \overline{OO'}$ la distance des points fixes O, O′ qui définissent l'axe fixe $OO'x$;

Oy, Oz deux axes rectangulaires fixes dans le corps et perpendiculaires à Ox;

Fig. 41.



θ l'angle formé par le plan xOy avec un plan fixe xOY;

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire;

x, y, z les coordonnées d'un point m du corps qui se projette en n sur le plan yOz;

M, $I = \Sigma mr^2$ la masse et le moment d'inertie par rapport à Ox du corps;

N, N′ les réactions de O, O′ sur le solide;

P la résultante des forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes en O et $\mathfrak{M}$ le moment du couple résultant.

Les composantes tangentielle et centrifuge de la force d'inertie χ de m sont $-mr\frac{d\omega}{dt}$, $m\omega^2 r$.

L'équation du mouvement est celle, $-\Sigma mr\frac{d\omega}{dt}r+\mathfrak{M}_x=0$, des moments par rapport à Ox ou

$$(1)\qquad I\frac{d^2\theta}{dt^2}=\mathfrak{M}_x.$$

Si $\mathfrak{M}_x$ est une fonction de θ, on a, en multipliant par $d\theta$ et intégrant,

$$(1')\qquad \frac{I}{2}(\omega^2-\omega_0^2)=\int_{\theta_0}^{\theta}\mathfrak{M}_x\,d\theta,$$

c'est-à-dire l'équation des forces vives qu'on aurait pu écrire immédiatement. En y remplaçant ω par $\frac{d\theta}{dt}$, cette équation fera connaître t en fonction de θ par une quadrature. On a

$$(a)\qquad \chi_x=0,\qquad \chi_y=m\omega^2y+mz\frac{d\omega}{dt},\qquad \chi_z=m\omega^2z-my\frac{d\omega}{dt},$$

et pour les équations de translation

$$P_x+N_x+N'_y=0,$$

$$\Sigma m\omega^2y+\Sigma mz\frac{d\omega}{dt}+P_y+N_y+N'_y=0,$$

$$\Sigma m\omega^2z-\Sigma my\frac{d\omega}{dt}+P_z+N_z+N'_z=0,$$

ou, en désignant par y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, parallèles à Oy, Oz,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&P_x+N_x+N'_x=0,\\&\omega^2My_1+Mz_1\frac{d\omega}{dt}+P_y+N_y+N'_y=0,\\&\omega^2Mz_1-My_1\frac{d\omega}{dt}+P_z+N_z+N'_z=0.\end{aligned}\right.$$

Les équations des moments par rapport à Oy, Oz sont

$$-\Sigma\chi_z x + \mathfrak{M}_y - N'_z a = 0,$$
$$\Sigma\chi_y z + \mathfrak{M}_z + N'_y a = 0,$$

ou, vu (a),

$$(3)\quad \begin{cases} -\omega^2\Sigma mxz + \dfrac{d\omega}{dv}\Sigma mxy + \mathfrak{M}_y - aN'_z = 0, \\ \omega^2\Sigma mxy + \dfrac{d\omega}{dt}\Sigma mxz + \mathfrak{M}_z + aN'_y = 0. \end{cases}$$

Comme au n° 52 et pour les mêmes motifs, la première des équations (2) ne fait connaître que la somme de N_x, N'_x. La seconde et la troisième des équations (2) et les équations (3) permettront de déterminer N_y, N'_y, N_z, N'_z.

Considérons le cas où le corps n'est sollicité par aucune force extérieure; d'après l'équation (1), la vitesse angulaire restera constante, et l'on aura

$$\omega^2 My_1 + N_y + N'_y = 0,$$
$$\omega^2 Mz_1 + N_z + N'_z = 0,$$
$$\omega^2\Sigma mxz + N'_z a = 0,$$
$$\omega^2\Sigma mxy + N'_y a = 0.$$

Pour que N′ soit nul, il faut que $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma mxy = 0$, ou que Ox soit un axe principal d'inertie pour le point O; l'appui O′ sera inutile et le mouvement uniforme de rotation se maintiendra autour de l'axe Ox qui ne changera pas de position. C'est ce qui a fait donner le nom d'*axes permanents* de rotation aux axes principaux d'inertie relatifs à un point fixe.

Pour que N soit nul en même temps que N′ il faut que Ox passe par le centre de gravité, d'où le nom d'*axes naturels de rotation* donné aux axes principaux d'inertie issus du centre de gravité.

86. *Pendule composé.* — On désigne ainsi un corps pesant mobile autour d'un axe horizontal fixe Oz. Soient

O la projection sur Oz du centre de gravité du corps;
G_1 la position de ce centre sur la verticale Ox de O;

G_0 celle du même centre lorsque le pendule, écarté de sa position naturelle, est ensuite abandonné à lui-même;

G la position du centre de gravité à l'instant t;

$l = \overline{OG}$, $\theta_0 = \widehat{G_0 O x}$, $\theta = \widehat{GOx}$.

L'équation des forces vives donne

$$\frac{I}{2}\frac{d\theta^2}{dt} = Mgl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{I}{Ml}, \tag{1}$$

il vient

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{\lambda}(\cos\theta - \cos\theta_0). \tag{2}$$

Il suit de là que le pendule composé se meut suivant la même loi que le pendule simple du *synchrone* dont la longueur est λ [1].

Soit I_1 le moment d'inertie du corps par rapport à la parallèle $G_1 z_1$ à Oz; on a $I = I_1 + Ml^2$, par suite

$$\lambda = \frac{I_1}{Ml} + l. \tag{3}$$

Portons sur Ox la longueur $OO' = \lambda$ et menons la parallèle $O'z'$ à Oz; le point O' est ce qu'on appelle le *centre d'oscillation* et $O'z'$ est l'*axe d'oscillation*.

Tous les éléments matériels du solide situés sur $O'z'$ se meuvent comme si les autres n'existaient pas.

---

[1] *Détermination expérimentale du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Oz fixé dans ce solide.*

On rend l'axe horizontal; on écarte le corps de 15° à 20° de sa position naturelle.

L'observation de la durée $T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ fera connaître λ; si la longueur l a pu être obtenue par le calcul ou expérimentalement et si $P = Mg$ est le poids du corps, la formule (1) donne

$$I = \frac{P}{g} l\lambda.$$

L'équation (3) donne

$$(\lambda - l)l = \frac{I_1}{M} \qquad \text{ou} \qquad \overline{OG_1}.\overline{O'G_1} = \frac{I_1}{M}.$$

En raison de la symétrie dans cette formule, on voit que, si $O'z'$ devient l'axe de suspension, Oz deviendra l'axe d'oscillation; c'est ce qui constitue la *réciprocité des axes de suspension et d'oscillation.*

Proposons-nous de déterminer quelle doit être la position, dans le solide, de l'axe de suspension pour que la durée $T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ d'une petite oscillation soit minimum. Nous remarquerons d'abord, d'après (3), que G_1z_1 doit être l'axe principal d'inertie, pour lequel le moment d'inertie est minimum; si C désigne ce minimum, on a

$$\lambda = \frac{C}{Ml} + l.$$

En faisant varier l, le minimum de λ correspondra à $l = \sqrt{\frac{C}{M}}$ et sera

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{C}{M}}.$$

87. *Mouvement d'un solide pesant autour d'un axe Oz incliné sur la verticale.* — Soient

O le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur Oz;

OV la verticale de O dirigée en sens inverse de la pesanteur;

α l'angle $\widehat{zOV}$;

Ox la perpendiculaire à Oz dans le plan zOV;

G_1 la position du centre de gravité sur Ox, et G celle qu'il occupe à l'instant t;

$l = \overline{OG}$, $\widehat{GOx} = \theta$;

M la masse du corps et I son moment d'inertie par rapport à Oz.

Le poids Mg donne la composante $-Mg\cos\alpha$ suivant Oz,

dont on n'a pas à s'occuper, et la composante $Mg \sin\alpha$ parallèle à Ox. On retombe alors sur le cas du pendule composé en substituant $Mg \sin\alpha$ à Mg.

On a ainsi la théorie des portes appelées *frappe-talon*.

88. *Mouvement d'un treuil dont la roue et le cylindre sont, par l'intermédiaire de cordes, soumis à l'action de deux charges verticales* Mg, $M'g$. — Soient

I le moment d'inertie du treuil;
R, R' les rayons de la roue et du cylindre;
ω la vitesse angulaire du treuil à l'instant t.

Pour fixer les idées on supposera que Mg se déplace dans la direction de la pesanteur, ce qui n'influe en rien sur la forme de l'équation que nous allons établir. On a, en tenant compte de l'inertie de M, M',

$$I\frac{d\omega}{dt} = M\left(g - R\frac{d\omega}{dt}\right)R - M'\left(g + R'\frac{d\omega}{dt}\right)R',$$

d'où

$$(I + MR^2 + M'R'^2)\frac{d\omega}{dt} = g(MR - M'R')$$

et l'on aura $\frac{d\omega}{dt} \gtrless 0$ selon que $MR > M'R'$.

Supposons que $R' = R$ et que la différence $M - M' = m$ soit assez petite pour qu'on puisse la négliger devant M, nous aurons

$$(I + 2MR^2)\frac{d\omega}{dt} = mgR.$$

On se trouve ici dans le cas de la machine d'Atwood réduite à sa partie essentielle, m représentant la masse additionnelle.

89. *Actions mutuelles, dans le mouvement varié, de corps tournant autour d'axes parallèles.* — On ne considérera que le cas de trois axes O_1, O_2, O_3, le même raisonnement s'étendant facilement à un nombre quelconque d'axes.

Le corps monté sur l'axe O_i est un treuil dont R_i, r_i sont respectivement les rayons de la roue et du cylindre et dont le moment d'inertie est I_i.

Une tension T_0 est exercée sur une corde tangente à la roue O_1; une deuxième corde relie le cylindre O_1 à la roue O_2, une troisième corde relie le cylindre O_2 à la roue O_3; enfin une résistance T_3 s'exerce, par l'intermédiaire d'une corde, tangentiellement au cylindre O_3. Soient, à l'instant t, ω_i la vitesse angulaire autour de O_i; T_1, T_2 les tensions des cordes qui relient respectivement les systèmes O_1, O_2 et O_2, O_3. On a

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{R_2}, \qquad \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3} = \omega_1 \frac{r_1 r_2}{R_2 R_3},$$

et pour les équations du mouvement des trois systèmes tournants,

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_0 R_1 - T_1 r_1,$$

$$I_2 \frac{r_1}{R_2} \frac{d\omega_1}{dt} = T_1 R_2 - T_2 r_2,$$

$$I_3 \frac{r_1 r_2}{R_2 R_3} \frac{d\omega_1}{dt} = T_2 R_3 - T_2 r_3.$$

Si on ajoute les premières de ces équations aux deux autres multipliées respectivement par $\frac{r_1}{R_2}$ $\frac{r_1 r_2}{R_2 R_3}$, on trouve

$$\left[I_1 + I_2\left(\frac{r_1}{R_2}\right)^2 + I_3\left(\frac{r_1 r_2}{R_2 R_3}\right)^2\right] \frac{d\omega_1}{dt} = T_0 R_1 - T_3 \frac{r_1 r_2 r_3}{R_2 R_3},$$

d'où $\frac{d\omega_1}{dt}$ et ensuite T_1 et T_2 au moyen des équations précitées.

90. *Mouvement d'une chaîne pesante homogène sur un double plan incliné* $(\overline{CA}, \overline{CA'})$, *comprise dans un plan normal à l'arête horizontale commune* C. — Soient

i, i' les inclinaisons de $\overline{CA}$, $\overline{CA'}$ sur l'horizon;
p le poids de l'unité de longueur et l la longueur de la chaîne;
$\overline{Ca} = x$, $\overline{Ca'} = l - x$ ses longueurs partielles qui, à l'instant t, se trouvent sur CA, CA'.

Le mouvement est censé avoir lieu de C vers A.
Le déplacement virtuel de $\overline{Ca}$ étant δx, celui de $\overline{Ca'}$ sera

$-\delta x$ et l'on aura

$$\left(px\sin i - x\frac{p}{g}\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x - \left[p(l-x)\sin i' + (l-x)\frac{p}{g}\frac{d^2x}{dt^2}\right]\delta x = 0,$$

d'où, pour l'équation du mouvement,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{l}(\sin i + \sin i')x + g\sin i' = 0,$$

équation qu'on peut d'ailleurs établir directement en égalant les tensions de $\overline{Ca}$ et $\overline{Ca'}$.

§ II. — Du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

91. *Préliminaires.* — Soient

Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires partant du point fixe O et fixes dans le corps;

$\omega = \overline{O\omega}$ la rotation instantanée du corps à l'instant t;

α, β, γ les angles de l'axe instantané de rotation $\overline{O\omega}$ avec Ox, Oy, Oz;

r la distance d'une molécule m du corps à $\overline{O\omega}$;

I le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe;

$J = \Sigma m\omega^2 r^2 = I\omega^2$ sa force vive;

$n = \omega\cos\alpha$, $p = \omega\cos\beta$, $q = \omega\cos\gamma$ les composantes de ω suivant Ox, Oy, Oz.

En faisant $\cos\alpha = \frac{n}{\omega}$, $\cos\beta = \frac{p}{\omega}$, $\cos\gamma = \frac{q}{\omega}$ dans l'expression générale de I (n° 46, art. II), on obtient

$$(a) \quad J = An^2 + Bp^2 + Cq^2 - 2H_{xy}np - 2H_{yz}pq - 2H_{zx}qn \text{ (1)}.$$

Comme J est une fonction homogène du second degré de n, p, q, on a

$$(b) \qquad n\frac{\partial J}{\partial n} + p\frac{\partial J}{\partial p} + q\frac{\partial J}{\partial q} = 2J.$$

---

(1) Comme vérification, on remarquera que

$$J = \Sigma m[(pz - qy)^2 + (qx - nz)^2 + (ny - px)^2] = \ldots.$$

Soient $\overline{\zeta} = \overline{O\zeta}$ l'axe du moment de la quantité de mouvement $m\omega r$ par rapport à O, qui est situé dans le plan $mO\omega$ et qui est perpendiculaire à Om; $\overline{P} = \overline{\Sigma\zeta}$ le moment résultant des quantités de mouvement.

On a $r = \overline{Om}\cos(\zeta, \omega)$; par suite,

$$J = \Sigma m\omega^2 r^2 = \omega\Sigma m.\omega r.\overline{Om}\cos(\zeta, \omega) = \omega\Sigma\zeta\cos(\zeta, \omega) = P\omega\cos(P, \omega).$$

Donc, *la force vive est égale au produit géométrique du moment résultant des quantités de mouvement par la rotation instantanée.*

Alors, la formule (b) peut s'écrire

$$n\frac{\partial J}{\partial n} + p\frac{\partial J}{\partial p} + q\frac{\partial J}{\partial q} = 2(nP_x + pP_y + qP_z),$$

d'où

$$(c) \qquad P_x = \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial n}, \qquad P_y = \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial p}, \qquad P_z = \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial q} \quad (^1).$$

92. *Équations du mouvement du solide* (Euler). — En prenant pour Ox, Oy, Oz les axes principaux d'inertie en O, on a

$$J = An^2 + Bp^2 + Cq^2, \qquad P_x = An, \qquad P_y = Bp, \qquad P_z = Cq.$$

Soient $\overline{OP} = P$, $\overline{OP'} = P'$ les axes des moments résultant des quantités de mouvement par rapport au point O aux instants t, $t + dt$; $\mathfrak{M}$ le moment des forces extérieures. On a (n° 81) $\mathfrak{M} = \frac{\overline{PP'}}{dt}$. La vitesse relative de l'index P, suivant Ox, par rapport au système mobile d'axes coordonnés, est $\frac{dP_x}{dt}$; sa vitesse d'entraînement $pP_z - qP_y$; on a, par

(1) Il est facile d'établir directement ces formules, car on a, par exemple,

$$P_x = \Sigma m[(qx - nz)x - (pz - qy)y] = cq - nH_{zx} + pH_{yz},$$

ce qui, d'après la formule (a), n'est autre chose que $\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial q}$.

suite, $\frac{dP_x}{dt} + pP_z - qP_y = \mathfrak{M}_x$, ou

$$(1)\qquad \begin{cases} A\frac{dn}{dt} + (C-B)pq = \mathfrak{M}_x, & \text{et, de même,} \\ B\frac{dp}{dt} + (A-C)qn = \mathfrak{M}_y, \\ C\frac{dq}{dt} + (B-A)np = \mathfrak{M}_z. \end{cases}$$

Dans le cas d'un potentiel U des forces extérieures, on peut remplacer l'une des équations (1) par celle de la force vive

$$(2)\qquad An^2 + Bp^2 + Cq^2 = 2U + h,$$

qui s'en déduit d'ailleurs en les multipliant respectivement par ndt, pdt, qdt, ajoutant et remarquant

$$dU = \mathfrak{M}_x n\,dt + \mathfrak{M}_y p\,dt + \mathfrak{M}_z q\,dt.$$

Soient α, β, γ les angles formés avec Ox, Oy, Oz par une droite Ou fixe dans l'espace. On a

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}(An\cos\alpha + Bp\cos\beta + Cq\cos\gamma) = \mathfrak{M}_u,$$

équation qui peut se déduire des équations (1), mais par des calculs compliqués qui exigent d'ailleurs la connaissance de formules que nous n'avons pas encore établies. Si les forces extérieures se réduisent à une seule force rencontrant la droite Ou ou qui lui est parallèle, on a $\mathfrak{M}_u = 0$, par suite,

$$(4)\qquad An\cos\alpha + Bp\cos\beta + Cq\cos\gamma = \text{const.}$$

93. *Condition pour que, dans le cas où le moment des forces extérieures est nul, l'axe instantané de rotation reste fixe dans le solide.* — On a $\mathfrak{M} = 0$, $U = \text{const.}$; si l'indice o caractérise les éléments qui se rapportent à un instant déterminé, on a, par hypothèse,

$$\frac{n}{\omega} = \frac{n_0}{\omega_0}; \qquad \frac{p}{\omega} = \frac{p_0}{\omega_0}, \qquad \frac{q}{\omega} = \frac{q_0}{\omega_0}.$$

L'équation de la force vive devient

$$An^2 + Bp^2 + Cq^2 = An_0^2 + Bp_0^2 + Cq_0^2,$$

et, en y substituant les valeurs de n, p, q déduites des relations précédentes, on trouve $\omega = \omega_0$, par suite $n = n_0$, $p = p_0$, $q = q_0$. Les équations (1) se réduisent à

$$(C - B)p_0q_0 = 0, \qquad (A - C)q_0n_0 = 0, \qquad (B - A)n_0p_0 = 0.$$

Nous avons deux cas à distinguer :

1° $A > B > C$. — Il faut que deux des composantes n_0, p_0, q_0 soient nulles. Soit, par exemple, $n_0 = 0$, $p_0 = 0$; l'axe instantané sera l'axe principal d'inertie Oz.

2° $A = B$. — On a

$$p_0q_0 = 0, \qquad q_0n_0 = 0.$$

Si $q_0 = 0$, l'axe instantané pourra être une droite quelconque située dans le plan xOy et qui est d'ailleurs un axe principal puisque l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de Oz.

Si $n_0 = 0$, $p_0 = 0$, la rotation se maintiendra autour de Oz.

Ainsi, quoi qu'il en soit, l'axe instantané doit être principal, ce que l'on savait d'ailleurs (n° 85).

94. *Position, à un instant quelconque t, du solide par rapport à trois axes fixes* OX, OY, OZ (*fig.* 42). — Soient

OA l'intersection des plans xOy, XOY;

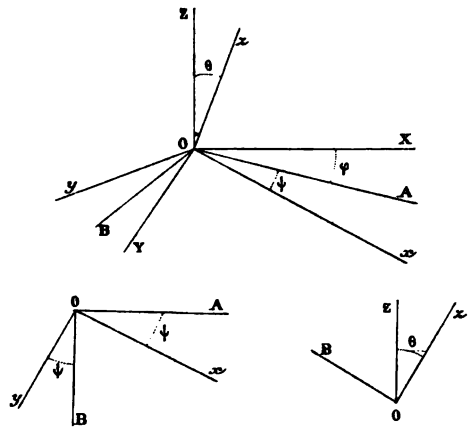
$\theta = \widehat{zOZ}$, $\varphi = \widehat{AOX}$, $\psi = \widehat{AOx}$ (coordonnées d'Euler);

OB la perpendiculaire à OA dans le plan xOy, qui est comprise dans le plan ZOz auquel OA est perpendiculaire.

Dans le temps dt, la droite OA se sera déplacée dans le plan XOY, en vertu de la rotation $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de OZ et sera venue en OA; le plan xOy aura tourné autour de OA′ en vertu de la rotation $\frac{d\theta}{dt}$; mais cette rotation se compose d'une rota-

tion égale autour de OA et d'une autre rotation infiniment petite et négligeable; par conséquent, le plan xOy doit être considéré comme ayant tourné autour de OA. Le système

Fig. 42.



d'axes Ox, Oy aura tourné dans son plan, en vertu de la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ autour de Oz.

Les rotations $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ se décomposent de la manière suivante :

$$(A)\quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} \begin{cases} \frac{d\theta}{dt}\cos\psi, & \text{suivant } Ox, \\ \frac{d\theta}{dt}\sin\psi, & \text{» } Oy, \end{cases} \\ \frac{d\varphi}{dt} \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta, & \text{suivant } Oz, \\ \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta, & \text{» OB} \begin{cases} -\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\psi, & \text{suivant } Ox, \\ \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi, & \text{» } Oy. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On a d'ailleurs la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ suivant Oz. En récapitulant,

on obtient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt}\cos\psi + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\psi = n,\\ &-\frac{d\theta}{dt}\sin\psi + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi = p,\\ &\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta + \frac{d\psi}{dt} = q.\end{aligned}\right.$$

Les équations (1) auront donc lieu, en définitive, entre t et les inconnues θ, φ, ψ.

Les deux premières des équations (5) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(5')\quad \frac{d\theta}{dt} = n\cos\psi - p\sin\psi, \qquad \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta = n\sin\psi + p\cos\psi.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{dt}$ entre la troisième des équations (5) et la seconde des équations (5'), on obtient la suivante :

$$(5'')\quad \frac{d\psi}{dt} = q - (n\sin\psi + p\cos\psi)\cos\theta,$$

qui peut être substituée à la troisième des équations (5).

En posant $\cos(Z, x) = \gamma$, $\cos(Z, y) = \gamma'$, $\cos(Z, z) = \gamma''$, on a, par la considération des composantes de $\frac{d\varphi}{dt}$ mentionnées dans le Tableau (A),

$$\gamma = \sin\theta\sin\psi, \qquad \gamma' = \sin\theta\cos\psi, \qquad \gamma'' = \cos\theta;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \cos\theta\sin\psi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\cos\psi\frac{d\psi}{dt},\\ \frac{d\gamma'}{dt} &= \cos\theta\cos\psi\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\sin\psi\frac{d\psi}{dt},\\ \frac{d\gamma''}{dt} &= -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}$$

En remplaçant dans ces formules $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ par leurs valeurs

(5′) et (5″), on obtient

$$\frac{d\gamma}{dt} = q\sin\theta\cos\psi - p\cos\theta,$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} = n\cos\theta - q\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{d\gamma''}{dt} = -n\cos\psi\sin\theta + p\sin\psi\sin\theta,$$

ou

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma' q - \gamma'' p,\\ \frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma'' n - \gamma q,\\ \frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma p - \gamma' n,\end{aligned}\right.$$

avec

$$(6')\qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Les variables γ, γ', γ'' peuvent être substituées avec avantage à θ, ψ, lorsque les seconds membres des équations (1) sont indépendants de φ, comme cela a lieu, par exemple, quand le corps est sollicité par une force constante Q parallèle à OZ, dont le point d'application a pour coordonnées a, b, c parallèles à Ox, Oy, Oz. Car on a

$$\mathfrak{M}_x = Q(b\gamma'' - c\gamma'),\qquad \mathfrak{M}_y = Q(c\gamma - a\gamma''),\qquad \mathfrak{M}_z = Q(a\gamma' - b\gamma).$$

Une des trois équations (6) doit rentrer dans les deux autres; mais il sera bon de les conserver toutes trois dans le calcul, sauf à opérer la réduction en temps et lieu.

95. *Mouvement du solide lorsqu'il est sollicité par des forces qui ont une résultante qui passe par le point fixe.* — Nous supposerons $A > B > C$.

Nous avons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dn}{dt} + (C - B)pq &= 0,\\ B\frac{dp}{dt} + (A - C)qn &= 0,\\ C\frac{dq}{dt} + (B - A)np &= 0.\end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces équations respectivement multipliées par n, p, q et intégrant, on obtient l'équation des forces vives

$$(2) \qquad An^2 + Bp^2 + Cq^2 = \text{const.}\, h.$$

Si l'on ajoute les mêmes équations, après les avoir respectivement multipliées par An, Bp, Cq et si l'on intègre ensuite, on trouve

$$(2') \qquad A^2n^2 + B^2p^2 + C^2q^2 = \text{const.}\, k^2,$$

équation qu'on aurait pu écrire immédiatement, puisqu'elle exprime simplement que le moment résultant des quantités de mouvement est une constante k.

On déduit des équations (2), (2')

$$(3) \qquad \begin{cases} n^2 = \dfrac{k^2 - Ch - Bp^2(B-C)}{A(A-C)}, \\ q^2 = \dfrac{Ah - k^2 - Bp^2(A-B)}{C(A-C)}; \end{cases}$$

et, en portant ces valeurs dans la seconde des équations (1), on trouve

$$(4) \quad dt = \pm\sqrt{AC}\,\frac{B\,dp}{\sqrt{[k^2 - Ch - Bp^2(B-C)][Ah - k^2 - Bp^2(A-B)]}};$$

on prendra le signe + ou le signe -1, selon que p croîtra ou décroîtra.

Le temps s'exprimera en fonction de p, au moyen des fonctions elliptiques; à l'inverse, on pourra admettre que p, par suite n, q, sont exprimés en fonction de t.

Reportons-nous aux *fig.* 42 du n° 94; nous prendrons pour OZ la direction du moment résultant k des quantités de mouvement. Ce moment se décompose ainsi qu'il suit :

$$k\cos\theta = Cq, \quad \text{suivant } Oz,$$

$$k\sin\theta, \quad \text{»} \quad OB \begin{cases} k\sin\theta\,\sin\psi = An, & \text{suivant } Ox, \\ k\sin\theta\,\cos\psi = Bp, & \text{»} \quad Oy, \end{cases}$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{Cq}{k}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{An}{Bp}.$$

En multipliant par $\sin\theta$ la seconde des équations (5′) du n° 94 et ayant égard aux valeurs ci-dessus de $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, on obtient

$$\left(1-\frac{C^2q^2}{k^2}\right)\frac{d\varphi}{dt}=\frac{Bp^2+An^2}{k}=\frac{h-Cq^2}{k},$$

ou, en remplaçant q^2 par sa valeur (3),

$$(5)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=k\left[\frac{k^2-Ch+Bp^2(A-B)}{A(k^2-Ch)+BCp^2(A-B)}\right],$$

et, en se reportant à la valeur (4), φ pourra s'exprimer en fonction de p.

Cas singulier de $k^2-Bh=0$. — En portant la valeur de h déduite de cette relation dans les formules (3), on trouve

$$n^2=\frac{(B-C)(k^2-B^2p^2)}{AB(A-C)},$$

$$q^2=\frac{(A-B)(k^2-B^2p^2)}{BC(A-C)}.$$

Pour que n et q soient réels, il faut que $k^2-B^2p^2>0$ et, par suite, que p^2 ne dépasse pas une certaine limite. Les rotations n, q resteront de même signe que leurs valeurs initiales n_0, q_0, jusqu'au moment où elles s'annuleront pour $p=\pm\frac{k}{B}$; mais, comme à partir de cet instant le solide tournera autour de l'axe permanent Oy, on n'a qu'à considérer la période ci-dessus.

Si l'on fait $h=\frac{k^2}{B}$ dans la formule (4), et si l'on pose $\frac{2k}{B}\sqrt{\frac{(A-B)(A-C)}{AC}}=m$, on trouve

$$m\,dt=\pm\left(\frac{B\,dp}{k+Bp}+B\frac{dp}{k-Bp}\right),$$

d'où, en désignant par N une constante,

$$\pm mt=\log N\frac{k+Bp}{k-Bp}\qquad\text{et}\qquad p=\frac{k}{B}\,\frac{e^{\pm mt}-N}{e^{\pm mt}+N}.$$

On voit ainsi que p n'atteindra sa limite $\pm \frac{k}{B}$ que pour $t = \infty$.

96. *Interprétation géométrique du mouvement ci-dessus.* — On donne le nom de *pôle de rotation* à l'intersection m de l'axe instantané de rotation avec l'ellipsoïde d'inertie

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Si l'on désigne par $\frac{1}{\eta}$ la distance du centre O au plan tangent mené au point (x, y, z) de la surface, on a

$$(2) \qquad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \eta^2.$$

Les équations (1), (2) et les équations (2), (2') du numéro précédent sont vérifiées par

$$n = x\sqrt{h}, \qquad p = y\sqrt{h}, \qquad y = z\sqrt{h}, \qquad \eta^2 = \frac{k^2}{h} = \text{const.}$$

On voit alors que x, y, z sont les coordonnées du pôle de rotation m puisque $\frac{x}{n} = \frac{y}{p} = \frac{z}{q}$.

Si r désigne le rayon vecteur Om, on a

$$\omega = \sqrt{h}\,r.$$

Le cosinus de l'angle avec Ox de la normale N à l'ellipsoïde au point m est

$$\cos(N, x) = \frac{Ax}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}} = \frac{An}{\sqrt{A^2n^2 + B^2p^2 + C^2q^2}} = \frac{An}{k},$$

et de même

$$\cos(N, y) = \frac{Bp}{k}, \qquad \cos(N, z) = \frac{Cq}{k};$$

donc, la normale en m, à l'ellipsoïde, reste constamment parallèle à l'axe $\overline{Ok}$ du moment des quantités de mouvement; de plus, comme $\frac{1}{\eta}$ est une constante, le plan tangent en m est fixe dans l'espace et parallèle au plan invariable.

La composante de ω parallèle à N ou Ok est

$$\frac{\omega}{\eta r} = \frac{h}{k} = \text{const.} \ (^1).$$

De ce qui précède, on déduit les théorèmes suivants (Poinsot) :

I. *Le pôle de rotation est le point de l'ellipsoïde d'inertie où le plan tangent* (P) *est parallèle au plan invariable.*

II. *Le plan* (P) (dit *directeur*) *est fixe dans l'espace.*

III. *La rotation instantanée est proportionnelle au rayon vecteur du pôle.*

IV. *Sa composante normale est constante.*

V. *Le mouvement du solide est défini par le roulement de l'ellipsoïde sur le plan directeur.*

Le lieu du pôle de rotation sur l'ellipsoïde d'inertie est ce qu'on appelle la *Polhodie;* elle est l'intersection de cet ellipsoïde avec l'ellipsoïde représenté par l'équation (2).

En retranchant l'une de l'autre les équations (1) et (2) après avoir multiplié la première par A, on obtient

$$\eta^2 - A = B(B - A)y^2 + C(C - A)z^2 < 0,$$

et de même $\eta^2 - C > 0$. La valeur de $\eta^2 - B$, étant composée d'un terme positif et d'un terme négatif, peut être positive, nulle ou négative.

Les inégalités $\eta^2 - A < 0$, $\eta^2 - C > 0$ résultent d'ailleurs de ce* que $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}$ étant le plus petit et le plus grand des demi-axes de l'ellipsoïde d'inertie, on a $\frac{1}{\sqrt{A}} < \frac{1}{\eta}$, $\frac{1}{\sqrt{C}} > \frac{1}{\eta}$.

En retranchant l'équation (2) de l'équation (1) multipliée par η^2, on obtient la suivante

$$(3) \qquad -A(A - \eta^2)x^2 + B(\eta^2 - B)y^2 + C(\eta^2 - C^2)z^2 = 0,$$

(*) C'est ce qui résulte aussi (n° 91) de $\omega k \cos(k, \omega) = h$.

qui représente le cône du second degré (C_p), lieu de l'axe instantané de rotation dans le solide. Ce cône étant considéré comme ayant pour axe Ox ou Oz, selon que $\eta^2 - B \gtrless o$ est à base elliptique.

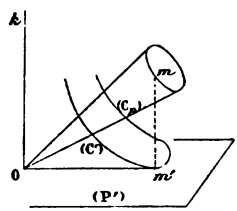
Si $\eta^2 = B$, le cône (C_p) se réduit à deux plans, mais l'axe instantané restera dans celui d'entre eux où il se trouvait à l'instant initial.

On sait que le produit RR′ des rayons de courbure principaux en chaque point d'un ellipsoïde est égal au produit des trois demi-axes divisé par la quatrième puissance de la distance du centre au plan tangent. Il suit de là que, en tous les points de la polhodie, la courbure moyenne $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$ (telle que l'entend Gauss) de l'ellipsoïde d'inertie est constante.

L'*herpolhodie* de Poinsot est le lieu du pôle de rotation sur le plan directeur; c'est la base du cône (C_h), lieu des axes instantanés de rotation dans l'espace sur lequel roule le cône (C_p).

Nous renverrons au Tome VII (Chap. VI) pour l'étude de l'herpolhodie qui n'offre aucun intérêt au point de vue de la Mécanique. Toutefois, avant d'abandonner notre sujet, nous ferons connaître une dernière représentation géométrique du mouvement, due aussi à Poinsot, qui est intéressante en ce sens qu'elle conduit MM. Darboux et Kœnigs à la construction d'un ingénieux appareil, l'*herpolhographe,* qui, comme l'indique son nom, permet de tracer mécaniquement l'herpolhodie.

Fig. 43.



Soient (*fig.* 43) (P′) un plan parallèle en O à (P), m' la projection du pôle m sur le plan. Concevons qu'on imprime à

(P′), autour de Ok, la rotation normale $\frac{\sqrt{h}}{\eta}$; la rotation relative du solide par rapport à (P′) sera $\sqrt{h}.\overline{Om'}$, et $\overline{Om'}$ tracera dans le solide un cône (C′), qui roulera d'un mouvement relatif sur (P′).

En désignant par x', y', z' les coordonnées de m' et projetant le contour O$m'm$ sur Ox, on obtient

$$x' = x - \frac{1}{\eta}\frac{An}{k} = x - \frac{1}{\eta}\frac{A}{k}\sqrt{h}x = x\left(1 - \frac{A}{\eta^2}\right);$$

d'où

$$x = \frac{\eta^2 x'}{\eta^2 - A} \quad \text{et de même} \quad y = \frac{\eta^2 y'}{\eta^2 - B}, \quad z = \frac{\eta^2 z'}{\eta^2 - C}.$$

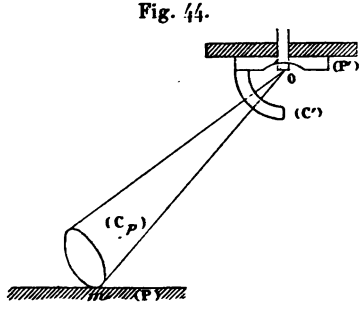
En portant ces valeurs dans les équations (1) et (3), on trouve les suivantes

$$\frac{A^2 x'^2}{(\eta^2 - A)^2} + \frac{B^2 y'^2}{(\eta^2 - B)^2} + \frac{C^2 z'^2}{(\eta^2 - C)^2} = \eta^2,$$

$$\frac{Ax'^2}{\eta^2 - A} + \frac{By'^2}{\eta^2 - B} + \frac{Cz'^2}{\eta^2 - C} = 0,$$

dont la seconde représente le cône (C′). Ainsi le lieu de m' dans le solide est l'intersection d'un cône et d'un ellipsoïde. Le cône (C′) a le même axe que (C_h), et sa base est elliptique.

Fig. 44.



Arrivons maintenant à l'herpolhographe (*fig.* 44). On se donnera $\Omega = \frac{h}{k}$, $\frac{1}{\eta} = \frac{\sqrt{h}}{k}$ et l'équation (3) de (C_p), ce qui déter-

minera les valeurs numériques de h, k, A, B, C et, par suite, l'équation de (C'). On terminera le cône (C_p) par la polhodie. Le plan (P') est représenté par la face inférieure d'un disque horizontal denté sur son pourtour, le cône (C') par une roue dentée engrenant [1] avec (P') et faisant corps avec le cône (C_p) réduit à une écorce. Un mouvement d'horlogerie imprime à (C') la rotation Ω; le cône (C') roule sur le plan (P'), et le roulement sur le plan (P) du bord de (C_p) trace l'herpolhodie.

97. *Stabilité des axes permanents de rotation.* — Nous ne ferons ici aucune restriction sur les grandeurs relatives de A, B, C.

Le solide est animé de la rotation uniforme q_0 autour de l'axe permanent Oz; on lui imprime, et par conséquent au solide, une rotation $\overline{n_0} + \overline{p_0}$ aussi petite qu'on voudra; pour que l'axe Oz soit stable, il faut que l'angle compris sous Oz et l'axe instantané reste très petit quel que soit t, et, par suite, qu'il en soit de même de n, p dont on négligera les carrés et les produits devant q_0. Les équations du mouvement se réduisent aux suivantes

$$C\frac{dq}{dt} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad q = q_0,$$

$$(1) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dn}{dt} + (C - B)q_0 p = 0, \\ B\dfrac{dp}{dt} + (A - C)q_0 n = 0. \end{cases}$$

Si, en désignant par α, i, P, λ des constantes, on substitue, dans les équations (1),

$$(2) \qquad n = P\sin(\alpha t + \lambda), \qquad p = Pi\cos(\alpha t + \lambda),$$

---

[1] Cet engrenage dit *plan conique* est le cas particulier de l'engrenage conique où l'un des cônes primitifs se réduit à un plan. Le point fixe O est déterminé par une suspension de Cardan.

on trouve

$$(3)\qquad \alpha = q_0\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}},\qquad i = \sqrt{\frac{A-C}{B-C}\,\frac{A}{B}}.$$

Les valeurs (2) sont les intégrales complètes des équations (1), puisqu'elles renferment deux constantes arbitraires P et λ.

Mais il faut, pour qu'il y ait stabilité, comme on l'a supposé, que α soit réel; car, autrement, n, p renfermeraient des exponentielles, c'est-à-dire des termes croissant avec le temps; ce qui exige que

$$A > C,\qquad B > C\qquad \text{ou}\qquad A < C,\qquad B < C,$$

ou que la rotation q_0 ait lieu autour de l'axe principal d'inertie correspondant au plus grand ou au plus petit moment.

On peut justifier ainsi qu'il suit cette proposition. On a

$$k^2 - Ch = An^2(A-C) + Bp^2(B-C) = An_0^2(A-C) + Bp_0^2(B-C).$$

Le troisième membre de cette équation est censé très petit; si $A > C$, $B > C$ ou $A < C$, $B < C$, on voit que n, p resteront très petits, mais on ne peut rien dire quand C est le moyen moment d'inertie.

On déterminera P, λ par les conditions de $n = n_0$, $p = p_0$ pour $t = 0$.

D'après une formule du n° 95, on a

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{An}{Bp} = \frac{A}{Bi}\operatorname{tang}(\alpha t + \lambda).$$

De plus,

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{C^2q^2}{k^2}} = \frac{1}{k}\sqrt{A^2n^2 + B^2p^2}$$
$$= \frac{P}{Cq_0}\sqrt{A^2\sin^2(\alpha t + \lambda) + B^2i^2\cos^2(\alpha t + \lambda)}.$$

Dans l'équation suivante, empruntée au n° 95,

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{(h - Cq^2)}{k^2 - Cq^2} = k\frac{An^2 + Bp^2}{A^2n^2 + B^2p^2},$$

on devrait remplacer n, p par leurs valeurs (2); mais, dans

l'intégration, le calcul présente certaines longueurs qu'on évitera en ayant recours à la troisième des formules (5) du n° 94 qui donne, en y faisant $\cos\theta = 1$, $q = q_0$,

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = q_0;$$

par suite, en choisissant convenablement la direction de Ox,

$$\varphi = q_0 t - \psi = q_0 t - \text{arc tang}\left[\frac{A}{Bi}\,\text{tang}(\alpha t + \lambda)\right].$$

98. *Mouvement d'un solide lorsque son ellipsoïde d'inertie est de révolution.* — Soit $B = A$, on a

$$C\frac{dq}{dt} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad q = q_0,$$

$$A\frac{dn}{dt} + (C - A)pq_0 = 0,$$

$$B\frac{dp}{dt} + (A - C)q_0 n = 0.$$

Les formules (2), (3) du numéro précédent sont applicables ici, mais rigoureusement, et l'on a ainsi

$$\alpha = q_0(A - C), \quad i = 1, \quad n = P\sin(\alpha t + \lambda), \quad p = P\cos(\alpha t + \lambda):$$

de plus,

$$\text{tang}\,\psi = \frac{An}{Br} = \text{tang}(\alpha t + \lambda) \quad \text{ou} \quad \psi = \psi_0 + \alpha t,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{(h - Cq^2)}{k - C^2q^2} = Ak\frac{(n^2 + p^2)}{A^2(n^2 + p^2)} = \frac{k}{A}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{kt}{A};$$

d'ailleurs, d'après $Cq = Cq_0 = k\cos\theta$, on voit que $\theta = \theta_0$, c'est-à-dire que Oz décrit un cône de révolution autour de OZ.

99. *Emploi d'axes mobiles dans le solide lorsque son ellipsoïde d'inertie est de révolution.* — Soient

Ox l'axe de révolution de l'ellipsoïde;

$O\eta$, $O\zeta$ deux axes rectangulaires perpendiculaires à l'axe Ox, autour duquel ils tournent avec la vitesse angulaire n';

n, r, s les composantes de la rotation instantanée du corps suivant Ox, $O\eta$, $O\zeta$;

$\overline{OP} = P$ l'axe du moment des quantités de mouvement.

Les composantes de vitesse relative de l'index P par rapport aux axes mobiles suivant $O\zeta$ et $O\eta$ sont respectivement $B\frac{ds}{dt}$, $B\frac{dr}{dt}$; les composantes semblables de la vitesse d'entraînement sont aussi $-Anr + Brn'$ et $Ans - Bsn'$.

On a donc

$$(a) \qquad A\frac{dn}{dt} = \mathfrak{M}_x,$$

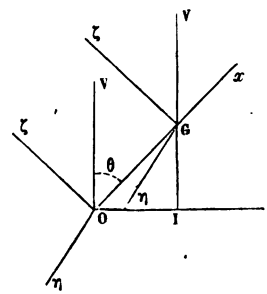
$$(b) \qquad B\frac{dr}{dt} + s(An - Bn') = \mathfrak{M}_\eta,$$

$$(c) \qquad B\frac{ds}{dt} + r(Bn' - An) = \mathfrak{M}_\zeta.$$

Si l'on fait $n = n'$, on retombe sur les formules d'Euler dans le cas de $C = B$. Soient (*fig.* 45) OV une droite fixe dans l'espace; θ l'angle $\widehat{VOx}$.

Nous prendrons $O\eta$ perpendiculaire au plan VOx.

Fig. 45.



La rotation de ce plan autour de OV se décompose en deux autres : l'une suivant $O\zeta$, qui n'est autre chose que s, et

l'autre $n' = s\cot\theta$; les deux équations (b), (c) deviennent

$$(b') \qquad B\frac{dr}{dt} + s(An - Bs\cot\theta) = \mathfrak{M}_\eta.$$

$$(c') \qquad B\frac{ds}{dt} + r(Bs\cot\theta - An) = \mathfrak{M}_\zeta.$$

Admettons que le moment par rapport à OV des forces extérieures soit nul; nous avons $\mathfrak{M}_x = 0$, $\mathfrak{M}_\zeta = 0$, $n = \text{const.}$, et, si l'on remarque que $r = \frac{d\theta}{dt}$, l'équation (c') devient

$$B\frac{ds}{dt}\sin\theta + Bs\cos\theta - An\sin\theta = 0,$$

d'où

$$(c'') \qquad Bs\sin\theta + An\cos\theta = \text{const.},$$

équation qu'on aurait pu écrire immédiatement, puisqu'elle exprime que le moment des quantités de mouvement estimé suivant $\overline{OV}$ est constant.

Supposons que $\mathfrak{M}_\eta$ soit encore nul ou, en définitive, que $\mathfrak{M} = 0$. Prenons pour OV la direction du moment k des quantités de mouvement. Nous avons

$$n = \text{const.}, \qquad An = k\cos\theta, \qquad Bs = k\sin\theta;$$

par suite

$$\theta = \text{const.}, \qquad s = \text{const.}, \qquad r = 0.$$

L'axe instantané de rotation décrit autour de Ox et de OV des cônes circulaires dont le second roule sur le premier.

100. *Mouvement autour d'un point fixe d'un corps pesant dont l'ellipsoïde d'inertie est de révolution et dont le centre de gravité* G *se trouve sur l'axe de révolution* (toupie gyroscopique). — Soient M la masse du corps; l la distance OG (*fig.* 45). Nous dirigerons OV en sens inverse de la pesanteur et nous caractériserons par l'indice o les quantités qui se rapportent à l'instant initial.

L'équation (c'') du numéro précédent et l'équation de la

force vive nous donnent

$$(1)\qquad Bs\sin\theta + An\cos\theta = Bs_0\sin\theta_0 + An\cos\theta_0,$$

$$(2)\qquad B[(r^2+s^2)-(r_0^2+s_0^2)] = 2Mgl(\cos\theta_0-\cos\theta),$$

d'où

$$(3)\quad s = \frac{An(\cos\theta_0-\cos\theta)+Bs_0\sin\theta_0}{B\sin\theta},$$

$$(4)\quad \dot{r} = \frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{\left\{2Mgl(\cos\theta_0-\cos\theta)+B(r_0+s_0^2) - \frac{[An(\cos\theta_0-\cos\theta)+Bs_0\sin\theta_0]^2}{B\sin^2\theta}\right\}}.$$

On remarquera, d'après l'équation (3), que θ ne peut s'annuler que si

$$An(\cos\theta_0-1)+Bs_0\sin\theta_0 = 0,$$

d'où

$$s_0 = \frac{An}{B}\operatorname{tang}\frac{\theta_0}{2},$$

et alors on peut écrire

$$s = \frac{An(\cos\theta_0-\cos\theta)+Bs_0\sin\theta_0 - An(\cos\theta_0-1)-Bs_0\sin\theta_0}{\sin\theta}$$
$$= \frac{An}{B}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

et s s'annulera avec θ.

Dans l'équation (4), qui fera connaître t en fonction de θ, on devra prendre le signe + ou le signe — selon que θ croîtra ou décroîtra.

Soient

OX un axe horizontal fixe;

H la projection du centre de gravité G sur le plan $XO\eta$,

$\rho = \overline{OH} = l\sin\theta$, $\psi = \widehat{HOX}$;

U l'angle formé par la tangente menée au lieu de H avec le rayon vecteur ρ.

La rotation s se décompose en $-s\cot\theta$ suivant Ox et $\Omega = \frac{s}{\sin\theta}$ suivant OV.

La seconde composante étant égale à $\frac{d\psi}{dt}$, on a

$$(5) \qquad \Omega = \frac{s}{\sin\theta} = \frac{d\psi}{dt} = r\frac{d\psi}{d\theta}.$$

Comme

$$d\rho = l\cos\theta\, d\theta = lr\cos\theta\, dt, \qquad d\psi = \frac{s}{\sin\theta}\, dt,$$

il vient

$$(6) \qquad \operatorname{tang} U = \rho\frac{d\psi}{d\rho} = \frac{s}{r\cos\theta}.$$

Discussion :

I. r_0 *n'est pas nul* et nous le supposerons positif.

L'angle θ croîtra d'abord à partir de θ_0 et, dans la formule (4), il faudra d'abord prendre le signe $+$. Mais la quantité sous le radical, qui était Br_0^2 pour $\theta = \theta_0$, devient $-\infty$ pour $\theta = \pi$; donc $\frac{d\theta}{dt}$ s'annulera pour une certaine valeur $\theta_1 > \theta_0$ de θ.

A partir de là, il faudra prendre le signe $-$; θ repassera par θ_0 et diminuera encore jusqu'à une certaine valeur $\theta_2 < \theta_0$, pour laquelle $r = 0$, puisque la quantité sous le radical devient $-\infty$ pour $\theta = 0$. Il faudra alors prendre le signe $+$ jusqu'à $\theta = \theta_1$, et ainsi de suite. L'axe OG oscillera donc dans le plan mobile VOx entre deux positions OG_1, OG_2.

Comme $U = 90°$ pour $r = 0$, le point H décrira une ligne tangente aux circonférences ayant pour rayons $l\sin\theta_1$, $l\sin\theta_2$.

II. $r_0 = 0$. — En posant

$$\begin{aligned} P = {} & 2MgBl\sin^2\theta - A^2n^2(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ & + B^2s_0^2(\cos\theta + \cos\theta_0) - 2ABns_0\sin\theta_0, \end{aligned}$$

on a

$$(7) \qquad r = \frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{1}{B\sin\theta}\sqrt{P(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

Pour $\theta = \theta_0$, la valeur de P est

$$P_0 = 2B(Mgl\sin^2\theta_0 + Bs_0^2\cos\theta_0 - Ans_0\sin\theta_0);$$

si on la suppose positive, θ commencera à croître à partir de θ_0 et l'on devra prendre le signe $+$ dans l'équation (7).

Mais r finira par s'annuler, car pour $\theta = \pi$, la fonction P prend la valeur $-2\left(An\cos\frac{\theta_0}{2} + Bs_0\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^2 < 0$. L'équation $P = 0$ a donc au moins une racine comprise entre θ_0 et π et r s'annulera pour la racine θ_1 qui suit immédiatement θ_0. A partir de $\theta = \theta_1$, l'angle θ décroîtra; on devra, dans la formule (7), prendre le signe — jusqu'à $\theta = \theta_0$, puis revenant vers θ_1 il faudra prendre le signe + et ainsi de suite.

Si l'on avait $P_0 < 0$, on aurait $\theta_1 < \theta_0$.

La forme du lieu de H est analogue à celle du numéro précédent, en faisant $\theta_2 = \theta_0$.

III. $r_0 = 0$, $s_0 = 0$. — En posant

$$\lambda = \frac{2MglB}{A^2n^2},$$

on a

$$(8) \qquad r = \pm\frac{An}{B\sin\theta}\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\lambda\sin^2\theta - \cos\theta_0 + \cos\theta)}.$$

Comme le coefficient de $(\cos\theta_0 - \cos\theta)$ sous le radical est positif pour $\theta = \theta_0$, θ croîtra de θ_0 à $\theta_1 > \theta_0$, etc. L'équation (3) donne

$$s = \frac{An}{B\sin\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

et l'équation (6)

$$\operatorname{tang} U = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\lambda\sin^2\theta - \cos\theta_0 + \cos\theta}}.$$

On voit que la ligne décrite par H est tangente à la circonférence dont le rayon est $l\sin\theta_1$ et qu'elle a des points de rebroussement sur la circonférence ayant $l\sin\theta_0$ pour rayon.

Foucault est arrivé à faire exécuter au solide, autour de Ox, trois mille tours par minute, soit $n = 314{,}16$, et, dans les conditions où il s'est placé, la constante λ était assez petite pour qu'on puisse en négliger le carré. D'après l'équation $\lambda\sin^2\theta_1 = \cos\theta_0 - \cos\theta_1$, on voit que $\theta_1 - \theta_0 = \varepsilon_1$, par suite $\theta - \theta_0 = \varepsilon$ est de l'ordre λ; on reconnaît alors facilement que

$$r = \frac{An}{B}\sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

En posant $\varepsilon = \varepsilon_1 \sin^2\sigma$, on obtient

$$dt = \frac{2B}{An}\,d\sigma, \qquad \sigma = \frac{An}{2B}\,t,$$

et finalement

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \sin^2 \frac{Ant}{2B}.$$

Si l'on désigne par T la durée d'une oscillation de Ox dans le plan VOx ou la valeur de t pour $\varepsilon = \varepsilon_1 = \lambda \sin\theta_0$, on a

$$T = \frac{\pi B}{An}.$$

D'autre part,

$$s = \frac{An}{B\sin\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \frac{An\varepsilon\sin\theta_0}{B\sin\theta} = \frac{An\varepsilon}{B};$$

par suite, la rotation du plan VOx autour de OV est

$$\Omega = \frac{s}{\sin\theta} = \frac{An\varepsilon}{B\sin\theta_0}.$$

La moyenne Ω' de Ω, qu'on peut seule observer, a pour valeur

$$\Omega' = \frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^{\varepsilon_1} \Omega\,d\varepsilon = \frac{An\varepsilon_1}{2B\sin\theta_0} = \frac{An\lambda}{2B} = \frac{Mgl}{An}.$$

La durée d'une révolution du plan ci-dessus autour de $\overline{OV}$ sera donc la valeur absolue de

$$\frac{2\pi}{\Omega'} = \frac{2\pi An}{Mgl}.$$

Le mouvement du plan VOx sera direct ou rétrograde selon que $l \lesseqgtr o$ ou que le centre de gravité G se trouvera au-dessus ou au-dessous du plan horizontal passant par le point O.

De la stabilité de l'équilibre de l'axe de révolution. — Si nous posons $A = Ma^2$, $B = Mb^2$, $r_0^2 + s_0^2 = \omega_0^2$, l'équation (4) prend la forme

$$(4') \qquad b^2 \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\left\{\begin{array}{l} 2glb^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin^2\theta + b^4\omega_0^2\sin^2\theta \\ -[a^2 n(\cos\theta_0 - \cos\theta) + b^2 s_0 \sin\theta_0]^2 \end{array}\right\}}.$$

L'axe Ox est en équilibre lorsqu'il coïncide avec la verti-

cale du point O. L'équilibre est stable si, en écartant Ox de la verticale d'un angle θ_0 aussi petit qu'on voudra et lui imprimant une rotation ω_0, également aussi petite qu'on voudra, l'écart par rapport à la verticale reste constamment très petit.

Deux cas sont à distinguer selon que, lors de l'équilibre, le centre de gravité G se trouve sur $\overline{OV}$ ou sur son prolongement.

Premier cas. — L'écart initial θ_0 et l'écart θ, à un instant quelconque, sont censés assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés devant l'unité.

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{a^4 n^2}{4} - glb^2,$$

$$\mu = \left(\frac{a^4 n^2}{2} - glb^2\right)\theta_0^2 + b^4\omega_0^2 - a^2 b^2 n s_0 \theta_0,$$

$$\nu = -\frac{a^4 n^2 \theta_0^4}{4} + b^4 s_0^2 \theta_0^2 + a^2 b^2 n s_0 \theta_0^2,$$

$$\zeta = \theta^2,$$

l'équation (4′) devient

$$\frac{1}{2} b^2 \frac{d\zeta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{4\lambda} + \nu}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\frac{\mu^2}{4\lambda} + \nu}\left(\zeta - \frac{\mu}{2\lambda}\right)^2}.$$

A son inspection, on voit que, pour que ζ soit réel et ne croisse pas avec le temps, il faut que

$$\frac{\mu^2}{4\lambda} + \nu > 0,$$
$$\lambda > 0.$$

De la seconde de ces conditions, on tire

$$(9) \qquad n > \frac{2b}{a^2}\sqrt{gl}.$$

La première condition revient à

$$g^2 l^2 \theta_0^4 + [(3a^4 n^2 - 2glb^2)s_0 - gla^2 n\theta_0]s_0\theta_0^2$$
$$+ \omega_0^2[b^4\omega_0^2 + (a^2 n^2 - 2glb^2)\theta_0^2 - 2a^2 b^2 n s_0 \theta_0] > 0,$$

et sera satisfaite, en prenant, comme il est permis de le faire, le rapport $\frac{\omega_0}{\theta_0}$ suffisamment petit.

Généralement, dans les expériences, on fait dévier l'axe Ox de la verticale au moyen d'une règle, et on l'abandonne ensuite à lui-même sans vitesse initiale. On a alors

$$\mu = \frac{(a^4 n^2 - 2glb^2)\theta_0^2}{2}, \qquad \nu = -\frac{a^4 n^2 \theta_0^4}{4}.$$

Dans la réalité, n diminue graduellement par l'effet des résistances passives et finit par se trouver au-dessous de la limite (9), ce qui explique pourquoi, sous la moindre influence dérangeant Ox de sa position d'équilibre, cette droite s'écarte de plus en plus de OV dans le plan tournant VOx.

Second cas. — On remplacera d'abord dans la formule (4') θ par $180° - \theta$, θ_0 par $180° - \theta_0$, ce qui revient à conserver cette formule en changeant les signes de a^2, l; à cela près, les calculs qui précèdent reçoivent ici leur application, et, comme λ est essentiellement positif, l'équilibre est toujours stable.

101. *Des efforts qu'il faut développer pour déplacer l'axe d'un solide de révolution animé d'un mouvement gyratoire très rapide autour de son arbre et fou sur cet arbre.* — Lorsqu'on maintient dans la main gauche une extrémité O de l'arbre et qu'on veut imprimer à l'autre extrémité A, par la main droite, un déplacement angulaire, on éprouve une résistance d'autant plus grande que le mouvement gyratoire autour de l'arbre est plus rapide, et c'est ce que nous allons expliquer.

Aux notations du numéro précédent, nous joindrons les suivantes : a est la distance OA et F est la réaction de la main droite sur le point A.

Le déplacement élémentaire de A a pour composantes

$$-ar\,dt \text{ suivant } O\zeta, \qquad as\,dt \text{ suivant } O\eta.$$

Le déplacement élémentaire vertical de G est

$$-d.l\cos\theta = l\sin\theta\, r\,dt.$$

En ne perdant pas de vue que n est constant, l'équation de la force vive est

$$\frac{B}{2}\,d(s^2+r^2) = Mglr\sin\theta\,dt + F_\eta\,as\,dt - F_\zeta\,ar\,dt,$$

ou

$$(1)\qquad B\left(s\frac{ds}{dt} + r\frac{dr}{dt}\right) = Mgl\sin\theta\,r + F_\eta\,as - F_\zeta\,ar.$$

En prenant les moments par rapport à OV, on obtient

$$\frac{d}{dt}(An\cos\theta + Bs\sin\theta) = F_\eta\,a\sin\theta,$$

où

$$(2)\qquad F_\eta\,a = -Anr + Bsr\cot\theta + B\frac{ds}{dt}.$$

Si l'on en élimine F_η entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3)\qquad F_\zeta\,a = Mgl\sin\theta - Ans + Bs^2\cot\theta - B\frac{dr}{dt}.$$

Mais il n'y a lieu de considérer que l'excédent de l'effort dû à la rotation n et alors on a simplement

$$(2')\qquad F_\eta\,a = -Anr,$$

$$(3')\qquad F_\zeta = -Ans,$$

d'où

$$F_\eta\,as\,dt - F_\zeta\,ar\,dt = 0,$$

ce qui exprime que le travail élémentaire de l'effort de F est nul ou que cet effort est normal à l'élément de chemin décrit par A.

On déduit des équations (2'), (3'),

$$F = \frac{An}{a}\sqrt{r^2+s^2} = \frac{An\omega'}{a},$$

en désignant par ω' la rotation imprimée à OA, d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

§ III. — Du mouvement d'un solide libre.

102. Ce mouvement se compose (nos 81 et 83) : 1° du mouvement du centre de gravité où la masse serait concentrée, soumis à l'action des forces extérieures; 2° du mouvement autour du centre de gravité considéré comme fixe, produit par les forces extérieures. Un projectile dans l'air après sa sortie de l'arme nous offre un premier exemple d'un corps libre; son mouvement autour du centre de gravité est produit par les pressions produites par l'air sur les éléments superficiels du projectile et qui dépendent des vitesses de ces éléments. Mais nous laisserons cette question de côté parce qu'elle perd son caractère rationnel, par suite des hypothèses qu'on est obligé de faire sur la loi des pressions élémentaires et parce qu'elle rentre dans le programme des cours de Balistique des Écoles d'application.

Nous nous restreindrons à traiter la question suivante :

103. *Mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, dû à ce que les attractions lunaire et solaire ne passent pas exactement par le centre.* — Comme pour notre hémisphère la rotation a lieu de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant l'axe de rotation, en ayant la tête au pôle boréal, nous admettrons, par exception, que ce sens est celui des rotations positives, ce qui reviendra à changer les signes des coefficients de $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\mathfrak{M}$ dans les équations d'Euler (n° 92).

Soient (*fig.* 42 du n° 94)

O le centre de gravité de la Terre;

XOY le plan de l'écliptique à une époque déterminée, prise pour origine du temps;

Ox, Oy, Oz les positions à l'instant t des axes principaux de la Terre dont les deux premiers déterminent le plan de l'équateur;

OA l'intersection des plans xOy, XOY ou la ligne des équinoxes, et OX sa position initiale;

χ, η les composantes de la rotation instantanée suivant OA et sa perpendiculaire OB dans le plan xOy; P_χ, P_η les composantes semblables du moment résultant P des quantités de mouvement.

Comme le moment $\mathfrak{M}$ des attractions du Soleil et de la Lune par rapport à O est très petit, il en sera de même de n, p, χ, η dont on négligera les carrés.

L'équation d'Euler qui se rapporte à Oz donne

$$q = q_0 + \int_0^t \mathfrak{M}_z \, dt;$$

mais, comme nous le verrons ci-après, l'intégrale peut être négligée, de sorte que nous considérons q comme constant.

Nous avons

$$n = \chi \cos\psi + \eta \sin\psi, \qquad p = -\chi \sin\psi + \eta \cos\psi,$$
$$P_\chi = An \cos\psi - Bp \sin\psi, \qquad P_\eta = A \sin\psi + Bp \cos\psi,$$

d'où, par l'élimination de n, p,

$$(1) \quad \begin{cases} P_\chi = \dfrac{A+B}{2}\chi + \dfrac{A-B}{2}(\chi \cos 2\psi + \eta \sin 2\psi), \\ P_\eta = \dfrac{A+B}{2}\eta - \dfrac{A-B}{2}(-\chi \sin 2\psi + \eta \cos 2\psi). \end{cases}$$

On a $P = \sqrt{C^2 q^2 - P_\chi^2 - P_\eta^2} = Cq_0$, et, comme la droite OP fait un angle du premier ordre avec Oz, on peut la considérer comme se confondant avec cet axe.

La vitesse d'entraînement de l'index P qui se rapporte au mouvement du système de OA et OB a pour composantes $-Cq_0\eta$, $Cq_0\chi$ suivant ces deux droites; d'où les équations

$$(2) \qquad \frac{dP_\chi}{dt} - Cq_0\eta = \mathfrak{M}_\chi, \qquad \frac{dP_\eta}{dt} + Cq_0\chi = \mathfrak{M}_\eta,$$

avec

$$(3) \qquad \chi = -\frac{d\theta}{dt};$$

d'ailleurs la rotation $-\frac{d\varphi}{dt}$ autour de OZ donne

$$(4) \qquad \eta = -\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta.$$

Les rotations χ, η étant indépendantes de ψ, la substitution des valeurs (1) dans les équations (2) ne laissera subsister que des termes en $\sin 2\psi$, $\cos 2\psi$. Mais la droite OA se déplace lentement et φ n'augmente annuellement que de 50″,3. On peut donc considérer OA comme fixe pendant un jour; comme $-\psi = q_0 t$ passe en vingt-quatre heures de zéro à 2π et que pendant cette durée $\sin 2\psi$ s'annule quatre fois et $\cos 2\psi$ deux fois, les termes en $\sin 2\psi$ et $\cos 2\psi$ n'influent en rien sur les mouvements de progression de φ et ψ. On écrira en conséquence, en désignant par $A' = \frac{A+B}{2}$ le moment d'inertie moyen dans le plan de l'équateur,

$$P_\chi = A'\chi, \qquad P_\eta = A'\eta,$$

et les équations (2) deviendront

$$A'\frac{d\chi}{dt} - Cq_0\eta = \mathfrak{M}_\chi, \qquad A'\frac{d\eta}{dt} + Cq_0\chi = \mathfrak{M}_\eta.$$

On reconnaît, en Mécanique céleste, que χ, η sont de la forme $\Sigma H_i \sin(it+\varepsilon_i)$ où i, H_i, ε_i sont des constantes; mais, comme χ, η varient avec une grande lenteur, i est très petit, par suite, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, qui sont de l'ordre i, peuvent être négligés.

Les équations ci-dessus se réduisent alors aux suivantes :

$$(5) \qquad Cq_0\eta = -\mathfrak{M}_\chi, \qquad Cq_0\chi = \mathfrak{M}_\eta.$$

Soient M la masse du Soleil ou de la Lune par rapport à celle de la Terre prise pour unité; a la distance de son centre de gravité (x, y, z) à celui O de la Terre. En poussant jusqu'au second ordre l'approximation de l'attraction de l'astre sur la Terre, on trouve facilement

$$\mathfrak{M}_x = \frac{3M}{a^3}(C-B)zy, \quad \mathfrak{M}_y = \frac{3M}{a^3}(A-C)xz, \quad \mathfrak{M}_z = \frac{3M}{a^3}(B-A)xy,$$

d'autre part

$$\mathfrak{M}_\chi = \mathfrak{M}_x \cos\psi - \mathfrak{M}_y \sin\psi, \qquad \mathfrak{M}_\eta = \mathfrak{M}_x \sin\psi + \mathfrak{M}_y \cos\psi.$$

Si l'on substitue à x, y les coordonnées x', y' parallèles à OA, OB, soit

$$x = x' \cos\psi + y' \sin\psi, \qquad y = y' \cos\psi - x' \sin\psi,$$

et si l'on fait abstraction des termes en $\sin 2\psi$, $\cos 2\psi$ pour les motifs que nous avons donnés plus haut, on trouve

$$\mathfrak{M}_\chi = \frac{3M}{a^3}(C - A')zy', \qquad \mathfrak{M}_\eta = -\frac{3M}{a^3}(C - A')zx', \qquad \mathfrak{M}_z = 0.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (5), puis les expressions de x', y', z' en fonction des coordonnées astronomiques, on déterminera χ, η et par suite les mouvements de pression φ et de nutation θ.

§ IV. — Du mouvement d'un solide pesant de révolution reposant sur un plan horizontal.

104. Le centre de gravité G du solide est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dont on fera abstraction. On désignera par GV la verticale de G, dirigée en sens inverse de la pesanteur, par θ l'angle qu'elle forme avec l'axe de révolution Gx; enfin, on fera usage des axes rectangulaires mobiles Gη, Gζ, dont le premier est perpendiculaire au plan VGx.

Les composantes de la rotation instantanée suivant Gx, Gη, Gζ seront désignées par n, $r = \frac{d\theta}{dt}$ et s.

Nous avons à résoudre deux questions.

105. *Le solide repose sur le plan par un point* O *de son axe* (*toupie*). — Soient (*fig.* 45, n° 99)

N la réaction du plan;
l la distance $\overline{OG}$;
I la projection de G sur le plan.

De $\overline{GI} = l\cos\theta$ on déduit, pour la vitesse verticale de G,

$$\frac{d\overline{GI}}{dt} = -l\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -l\sin\theta r.$$

Les moments de N, Mg par rapport à la droite $\overline{GV}$ étant nuls, le moment des quantités gyratoires du corps autour de G, estimé suivant cette droite, est constant, c'est-à-dire que, en caractérisant par l'indice o les éléments qui se rapportent à l'état initial, on a

$$An\cos\theta + Bs\sin\theta = An\cos\theta_0 + B_0\sin\theta_0,$$

d'où

$$(1) \qquad s = \frac{An(\cos\theta_0 - \cos\theta) + Bs_0\sin\theta_0}{B\sin\theta}.$$

Eu égard à la valeur ci-dessus de $\frac{d\overline{GI}}{dt}$, l'équation de Kœnig (n° 72) donne

$$\begin{aligned} &B(r^2 + s^2 - r_0^2 - s_0^2) + Ml^2(r^2\sin^2\theta - r_0^2\sin^2\theta_0) \\ &\quad = 2Mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta), \end{aligned}$$

d'où, en ayant égard à la valeur (1),

$$(2) \quad r = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{\left\{\begin{array}{c} 2Mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta) + B(r_0^2 + s_0^2) \\ + Ml^2 r_0^2\sin^2\theta_0 - \dfrac{[An(\cos\theta_0 - \cos\theta) + Bs_0\sin\theta_0)]^2}{B\sin^2\theta} \end{array}\right\}}{B + Ml^2\sin^2\theta}}.$$

L'équation (2) est un peu plus compliquée que l'équation (4) du n° 100, qui se rapporte à la toupie gyroscopique; elle se discutera de la même manière et conduira à des résultats analogues.

106. *Le solide reste tangent au plan horizontal.* — Soient (*fig.* 46)

K la projection du point de contact O sur Gx;

I l'intersection de la direction de $\overline{GV}$ avec le plan;

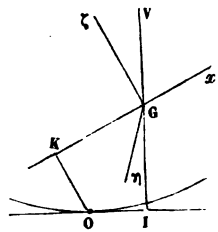
$$(1) \qquad f(x, \zeta) = 0$$

l'équation de la courbe méridienne;

V la vitesse verticale de G;

W la vitesse verticale de O dans son mouvement relatif par rapport à G.

Fig. 46.



On a pour le point O

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\cot\theta$$

ou

$$(1') \qquad \frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{d\zeta}} = \cot\theta,$$

et les équations (1) et (1') feront connaître les coordonnées x, ζ du point O en fonction de θ [1].

La vitesse verticale absolue V + W de O étant nulle, on a

$$V = -W.$$

Comme W ne résulte que de $r \times \overline{OG}$, sa valeur est

$$W = r \times \overline{OI} = r(\overline{GK}\sin\theta - \overline{OK}\cos\theta) = r(-x\sin\theta + \zeta\cos\theta),$$

par suite,

$$V = r(x\sin\theta - \zeta\cos\theta).$$

---

[1] Dans le cas de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1$, on a

$$x = -\frac{a^2\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}, \qquad \zeta = -\frac{b^2\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

$$A = \tfrac{2}{5}Mb^2, \qquad B = \tfrac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

La hauteur de G au-dessus du plan fixe étant

$$\overline{GI} = \overline{GK}\cos\theta + \overline{OK}\sin\theta = -(x\cos\theta + \zeta\sin\theta),$$

les équations du mouvement sont

$$An\cos\theta + Bs\sin\theta = An\cos\theta_0 + Bs_0\sin\theta_0,$$

$$B(r^2 + s^2 - r_0^2 - s_0^2) + M[(x\sin\theta - \zeta\cos\theta)^2 r^2 - (x_0\sin\theta_0 - \zeta_0\cos\theta_0)^2 r_0^2]$$
$$= 2Mgl(-x_0\cos\theta_0 - \zeta_0\sin\theta_0 + x\cos\theta + \zeta\sin\theta).$$

Ces équations conduisent encore à des résultats analogues à ceux qu'on a obtenus pour la toupie gyroscopique.

Dans la réalité, le solide s'élève bientôt sur l'un de ses sommets et d'autant plus rapidement que le plan est plus rugueux, ce qui est dû, par suite, au frottement.

CHAPITRE VIII.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN SYSTÈME INVARIABLE.

107. Les équations du mouvement sont les mêmes que celles du mouvement absolu en joignant les forces apparentes aux forces extérieures.

Quand il s'agit du mouvement relatif d'un corps pesant par rapport à la terre, on n'a qu'à faire intervenir les forces centrifuges composées.

Nous nous bornerons à donner quelques exemples du mouvement relatif d'un solide de révolution, problèmes dont les solutions seront rendues plus simples dès que nous aurons établi les deux lemmes suivants :

108. Lemmes :

I. *Réduction des forces centrifuges d'un solide de révolution qui tourne autour d'un axe* OZ *avec la vitesse angulaire* ω. — Soient

G le centre de gravité de la masse M du corps, par lequel on fera passer le plan $\widehat{ZOX}$;

A, B les moments d'inertie du solide par rapport à l'axe de révolution Gx et à toute perpendiculaire en G à cet axe;

X, Y, Z les coordonnées d'un élément matériel m de M;

X_1, Z_1 celles de G.

Nous n'examinerons que le cas, qui peut seul nous être utile, où l'axe de révolution Gx est compris dans le plan ZOX, et nous désignerons par α l'angle qu'il forme avec OZ.

Les composantes des forces centrifuges parallèles à OY se détruisent deux à deux et la résultante de ces forces est

$$\omega^2 \Sigma m X = M \omega^2 X_1,$$

c'est-à-dire la force centrifuge du centre de gravité où la masse M serait concentrée.

Soient

$G\zeta$ la perpendiculaire à Gx dans le plan ZOX;
$G\eta$ la parallèle en G à OY;
X, ζ les coordonnées de m par rapport à Gx, $G\zeta$.

On a

$$X = X_1 + x \sin\alpha - \zeta \cos\alpha,$$

et, pour le moment résultant, par rapport à $G\eta$, des forces centrifuges,

$$\omega^2 \Sigma m (X_1 + x \sin\alpha - \zeta \cos\alpha)(\zeta \sin\alpha + x \cos\alpha)$$
$$= \frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2} \Sigma m (\chi^2 - \zeta^2) = \omega^2 (B - A) \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Il suit de là que les forces centrifuges se réduisent à la force centrifuge du centre de gravité et à un couple dont le moment est $\frac{\omega^2 (B - A)}{2} \sin 2\alpha$ (1).

II. *Réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement gyratoire relatif d'un solide de révolution autour de son axe* Ox, *par rapport à un système invariable* (S). — Comme les forces centrifuges composées des molécules ne dépendent que de la rotation instantanée ω de (S) et de la rotation relative n du solide autour de son axe Ox, on peut supposer que la droite $\overline{O\omega}$, qui représente la rotation ω, parte d'un point quelconque O de Ox.

Le sens positif des rotations sera de la gauche vers la droite, en se couchant suivant les axes en ayant les pieds en O. L'axe coordonné Oz sera compris dans le plan de $\overline{O\omega}$ et de Ox, et

(1) Il est facile de s'assurer que, quand $G\chi$ est parallèle à OY, les forces centrifuges se réduisent simplement à celle du centre de gravité, où la masse serait concentrée.

α désignera l'angle formé par $\overline{O\omega}$ avec Ox. Comme les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse relative du point m ou (x, y, z) sont

$$V_x = 0, \qquad V_y = -nz, \qquad V_z = ny,$$

celles de la force centrifuge composée de m seront

$$\begin{aligned} X &= 2m\omega \sin\alpha V_y = -2m\omega \sin\alpha . nz, \\ Y &= 2m\omega \cos\alpha V_z = 2m\omega \cos\alpha . ny, \\ Z &= -2m\omega \cos\alpha V_y = -2m\omega \cos\alpha . nz, \end{aligned}$$

d'où

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0,$$

et les forces centrifuges composées, comme on pouvait le prévoir par la symétrie, se réduisent à un couple dont nous allons maintenant déterminer le moment $\mathfrak{M}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \Sigma(Zy - Yz) = 2\omega \cos\alpha . n\Sigma m(zy - yz) = 0, \\ \mathfrak{M}_y &= \Sigma(Xz - Zx) = 2\omega n\Sigma m(-z^2 \sin\alpha - zx \cos\alpha) = -A\omega n \sin\alpha, \\ \mathfrak{M}_z &= \Sigma(Yx - Xy) = 2\omega \cos\alpha . n\Sigma m(yx - zy) = 0. \end{aligned}$$

Le moment du couple est donc $-A\omega n \sin\alpha$ et son axe est Oy.

109. *Influence de la rotation de la Terre sur un solide de révolution animé d'un mouvement de rotation relative n autour de son axe* Gx *et dont le centre de gravité* G *est fixe* (*Gyroscope terrestre de Foucault*). — Soient

GN la parallèle en G à l'axe de la Terre dirigée vers le pôle boréal;

ω la rotation diurne dont le sens positif sera de la droite vers la gauche et dont on négligera le carré;

θ l'angle xGN.

L'axe Gη, perpendiculaire à Ox, est compris dans le plan NGx et Gη, r, s ont les mêmes significations qu'au n° 99.

Nous supposerons, comme dans les expériences de Foucault, que l'axe Ox part du repos ou que $r_0 = 0$, $s_0 = 0$.

D'après une des équations d'Euler, la rotation absolue autour de Gx est constante, ou

$$(1) \qquad n + \omega \cos\theta = n_0 + \omega \cos\theta_0.$$

L'équation de la force vive dans le mouvement relatif donne

$$An^2 + B(r^2 + s^2) - An_0^2 = 0,$$

ou, en remplaçant n par sa valeur déduite de (1),

$$(2) \qquad B(r^2 + s^2) = 2A\omega n_0(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

La rotation absolue suivant $G\zeta$ étant $s + \omega \sin\theta$, on a, en appliquant à GN le théorème des moments des quantités de mouvement,

$$A(n + \omega\cos\theta)\cos\theta + B(s + \omega\sin\theta)\sin\theta = A(n_0 + \omega\cos\theta_0) + B\omega\sin^2\theta_0,$$

ou, en éliminant n au moyen de l'équation (1),

$$B(s + \omega\sin\theta)\sin\theta = A(n_0 + \omega\cos\theta_0)(\cos\theta_0 - \cos\theta) + B\omega\sin^2\theta_0,$$

ou encore, en négligeant ω devant n_0,

$$(3) \qquad s = \frac{An_0}{B\sin\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Posons

$$l = \frac{A\omega n_0}{Mg},$$

et portons sur Gx la longueur $\overline{GO} = l$, l'équation (2) prend la forme

$$(2') \qquad B(r^2 + s^2) = 2Mgl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Les équations (3) et (2') sont celles du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe G, en supposant que O soit son centre de gravité et que GN soit la direction de la pesanteur.

Supposons que l'axe Gx soit assujetti à rester dans un plan : soient $\overline{GK}$ la projection de $\overline{GN}$ sur ce plan; α, φ les angles $\widehat{NGK}$, $\widehat{xGK}$; on a évidemment $\frac{d\varphi^2}{dt^2} = r^2 + s^2$; l'équa-

tion (2) de la force vive qui continue à s'appliquer dans le cas actuel devient

$$B\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2A\omega n_0(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

mais l'angle trièdre formé par GN, Gx, GK donne

$$\cos\theta = \cos\varphi\cos\alpha;$$

on a donc enfin

$$B\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2A\omega n_0\cos\alpha(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

équation du mouvement pendulaire de Ox de part et d'autre de OK.

La durée d'une oscillation de petite amplitude est

$$T = \pi\sqrt{\frac{B}{2A\omega n_0\cos\alpha}}.$$

Si le plan est le méridien, GK se confond avec GN.

Si le plan est horizontal, GK est la méridienne, et α la latitude du lieu; les oscillations de Gx auront lieu de part et d'autre de la méridienne avec laquelle Gx finira par coïncider lorsque ces oscillations auront été détruites. On aura ainsi un moyen de déterminer la méridienne; l'appareil est ce qu'on peut appeler une *boussole gyroscopique*.

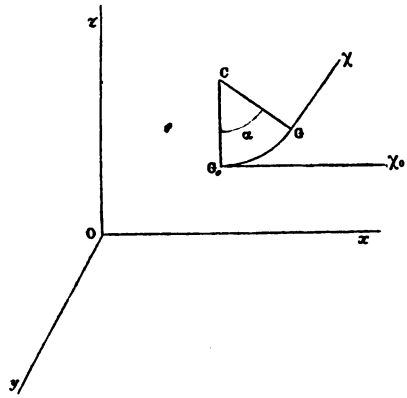
Le second lemme du numéro précédent conduit immédiatement à la théorie du gyroscope; en effet, la rotation relative du solide se composera de n_0 et de rotations de l'ordre de ω, qui donneront lieu à des forces centrifuges composées de l'ordre de ω^2 et, par conséquent, négligeables. Eu égard au sens positif convenu pour les moments, le mouvement relatif du corps sera déterminé par le couple $A\omega n_0\sin\theta$, ce qu'il suffit d'établir.

110. *Pendule gyroscopique de M. Sire.* — Soient (*fig.* 47) Oz un axe vertical autour duquel peut tourner un plateau horizontal; C un couteau perpendiculaire au plan zOx, supporté par un bâti fixé au plateau.

Le couteau fait corps avec une chape très légère, dont on

négligera la masse, qui supporte les pivots de l'axe horizontal $G_0\chi_0$ d'un tore dont le centre de gravité G_0 se trouve dans le plan zOx.

Fig. 47.



Soient

M la masse du tore;
A son moment d'inertie par rapport à $G_0\chi_0$;
B son moment d'inertie par rapport à toute perpendiculaire en G_0 à $G_0\chi_0$;
a la distance de G_0 à Oz;
l la longueur CG_0.

On imprime au tore une rotation n_0 de la gauche vers la droite en se plaçant suivant $\chi_0 G_0$ et au plateau une rotation uniforme ω dont le sens positif est de la gauche vers la droite en se plaçant suivant zO.

Voyons d'abord ce qui se passe immédiatement après l'instant initial. En se reportant au n° 108, les forces centrifuges et centrifuges composées donneront, par rapport à C, le moment $M\omega^2 al + A\omega n_0$, qui, s'il est positif, fera écarter le pendule de la droite vers la gauche, ce qui aura toujours lieu si ω est positif; mais, si ω est négatif et si, en valeur absolue, il est plus petit que $\frac{An_0}{Mal}$, le pendule se rapprochera de Oz, c'est-à-dire que les forces centrifuges composées l'emporteront

sur les forces centrifuges. Que le pendule se déplace d'un côté ou de l'autre de CG_0, il s'arrêtera, dans le plan zOx, sous l'action de la pesanteur, puis descendra, etc. Mais les oscillations seront rapidement détruites par les résistances passives, et le pendule prendra finalement la position pour laquelle le poids, les forces centrifuges et centrifuges composées se feront équilibre.

Proposons maintenant de déterminer la loi du mouvement de la chape dans le plan zOx.

Soient, à l'instant t,

$CG\chi$ la position qu'a prise $CG_0\chi_0$;
n la rotation relative du tore autour de $G\chi$;
α l'angle $\widehat{GCG_0}$ considéré comme positif s'il se trouve situé à droite de CG_0.

Transportons la rotation $\frac{d\alpha}{dt}$ parallèlement à elle-même en G_0 : il en résultera la translation $l\frac{d\alpha}{dt}$ qui sera la vitesse du centre de gravité, et l'accroissement de la force vive du tore dans son mouvement relatif par rapport au plateau sera

$$M^2 l^2 \frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\alpha^2}{dt^2} + A(n^2 - n_0^2);$$

mais la rotation absolue du tore autour de son axe est constante ou $n + \omega \sin\alpha = n_0$; par suite, la force vive ci-dessus devient

$$(B + Ml^2)\frac{d\alpha^2}{dt^2} + A\omega(\omega \sin\alpha - 2n_0)\sin\alpha.$$

Le travail de la force centrifuge du centre de gravité où la masse serait concentrée est

$$M\frac{\omega^2}{2}[(a + l\sin\alpha)^2 - a^2] = Ml\frac{\omega^2}{2}(2a + l\sin\alpha)\sin\alpha.$$

Le travail du couple résultant du transport en G des forces centrifuges élémentaires a pour expression

$$-(B - A)\frac{\omega^2}{2}\int_0^\alpha \sin 2\alpha\, d\alpha = \frac{(A - B)}{2}\omega^2 \sin^2\alpha;$$

enfin celui de la pesanteur est

$$-2Mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

L'équation de la force vive dans le mouvement relatif devient alors

$$\frac{1}{2}(B+Ml^2)\frac{d\alpha^2}{dt^2}+\frac{A\omega}{2}(\omega\sin\alpha-2n_0)\sin\alpha$$
$$=Ml\frac{\omega^2}{2}(2a+l\sin\alpha)\sin\alpha+\frac{(A-B)\omega^2\sin^2\alpha}{2}-2Mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ou

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}(B+Ml^2)\frac{d\alpha^2}{dt^2}&=(-B+Ml^2)\omega^2\sin^2\alpha\\&\quad+2(Mla\omega+An_0)\omega\sin\alpha-4Mgl\sin^2\frac{\alpha}{2};\end{aligned}\right.$$

d'où t en fonction de α par une quadrature.

En différentiant l'équation (1) par rapport au temps, on obtient

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}(B+Ml^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2}&=\frac{1}{2}(-B+Ml^2)\omega^2\sin 2\alpha\\&\quad+(Mla\omega+An_0)\omega\cos\alpha-Mgl\sin\alpha,\end{aligned}\right.$$

et la valeur de α qui déterminera la position d'équilibre de $\overline{CG}$ dans le plan zOx s'obtiendra en égalant à zéro le second membre de cette équation (2).

Si l'on fait $\alpha=0$, le second membre de l'équation (2) a pour valeur

$$M\omega^2 al+A\omega n,$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé directement pour le mouvement des forces par rapport à C à l'instant initial.

CHAPITRE IX.

DU CHOC DES CORPS SOLIDES.

111. Lorsque deux corps solides naturels ayant pour masses M et M′, libres ou assujettis à des liaisons, sont en mouvement et qu'ils viennent à se rencontrer, il se produit un effet mécanique qui a reçu le nom de *choc*.

Dans la région de leur contact, les corps se déforment mutuellement et graduellement et finissent par se séparer, à moins qu'ils ne viennent constituer un nouveau solide.

Comme nous admettrons qu'il n'y a pas de rupture, les variations relatives des distances intermoléculaires et, par suite, des déformations, seront très petites.

La durée d'un choc est variable avec les circonstances dans lesquelles il se produit; mais elle ne paraît pas devoir atteindre $\frac{1}{100}$ de seconde. Pendant cette courte durée, les molécules peuvent être considérées comme immobiles.

Cependant, du commencement à la fin du choc, les vitesses des molécules ont notablement changé et, en général, en grandeur et en direction.

Ces changements brusques de vitesse sont dus aux forces moléculaires développées entre les deux corps dans la région de contact, forces qui peuvent atteindre une grande énergie.

On doit concevoir que la durée du choc se divise en trois périodes :

1° Les corps se dépriment mutuellement et graduellement jusqu'au moment où ils atteignent leur plus grande déformation.

2° Cette déformation maximum se maintient pendant un

temps extrêmement court, infiniment petit si l'on veut. Pendant ce temps, chacun des corps constitue rigoureusement un système invariable et les composantes normales des vitesses des points de contact de l'un et l'autre corps sont égales. Dans son mouvement relatif par rapport à M', le corps M pivote en quelque sorte sur M' avec un glissement latéral qui donne lieu à un frottement que nous continuerons à négliger.

3° A partir de la fin de la seconde période, chacun des corps tend à reprendre sa forme primitive de laquelle il s'éloigne plus ou moins quand le choc cesse.

Dans la première période, il se produit un travail moléculaire négatif dû au rapprochement des molécules de M, M' dans la région du contact.

De la deuxième à la fin de la troisième, la détente des ressorts moléculaires restitue une partie du travail perdu dans la première.

112. *Évaluation du travail perdu dans la première partie du choc.* — Soient

v_0 la vitesse d'une molécule m de M ou M' au commencement du choc;
v sa vitesse à la fin de la première période;
$\overline{w} = \overline{v_0} - \overline{v}$ sa vitesse perdue;
$\overline{mI}$ la projection de $\overline{mv_0} = v_0$ sur la direction de v.

On désignera par N la résultante des réactions normales élémentaires de M' sur M, dont le point d'application a reçu le nom de *point de choc*; cette réaction sera normale aux surfaces des deux corps.

On a

$$v_0^2 = v^2 + w^2 + 2v.\overline{vI}$$

et pour l'ensemble des deux corps

$$\Sigma mv_0^2 = \Sigma mv^2 + \Sigma mw^2 + 2\Sigma m\overline{vI}.v.$$

Or (n° 82), pour M, les quantités de mouvement perdues mw font fictivement équilibre à $\int N dt$ et, comme à la fin de la

première partie du choc, les chemins élémentaires $v\,dt$ sont compatibles avec les liaisons, la somme de travail des mw ou $\Sigma m\overline{v\mathrm{I}}.v\,dt$ augmentée du travail de $\int \mathrm{N}\,dt$ doit être nulle. Comme pour le système des deux corps, les travaux de $\int \mathrm{N}\,dt$, $-\int \mathrm{N}\,dt$ se détruisent, on a $\Sigma m\overline{v\mathrm{I}}.v\,dt = 0$; par suite, $\Sigma m v_0^2 = \Sigma m v^2 + \Sigma m w^2$ ou, en désignant par F l'accroissement de la force vive,

$$\mathrm{F} = -\Sigma m w^2.$$

Donc, *la force vive perdue par* M, M′ *est égale à la force vive due aux vitesses perdues* (théorème de Carnot).

La valeur absolue $\mathfrak{T}_1$ du travail employé à déformer les deux corps M, M′ est

$$\mathfrak{T}_1 = \tfrac{1}{2}\,\Sigma m w^2.$$

113. *Demi-accroissement de la force vive après le choc.* — Soient v_3 la vitesse de la molécule m après le choc; $\mathfrak{T}_3$ le travail moléculaire restitué dans la troisième période; on a

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(v_3^2 - v_0^2) = -\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_3.$$

Avant de discuter cette équation, nous allons considérer les deux cas extrêmes suivants qui, envisagés chacun à un point absolu, n'ont qu'un caractère hypothétique.

1° *Les corps choquants sont complètement dénués d'élasticité.* — C'est à peu près le cas de deux masses de plomb, d'argile humectée, etc. Ici, le choc s'arrête à la fin de la première période et l'on a

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(v_3^2 - v_0^2) = -\mathfrak{T}_1 = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma m w^2.$$

2° *Les corps sont parfaitement élastiques.* — Les corps reviennent exactement à leur forme primitive après le choc, ce qui se rapproche du cas de deux billes d'ivoire, d'une bille et d'une table de marbre. Le travail moléculaire développé dans le choc étant nul, on a

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(v_3^2 - v_0^2) = 0.$$

Revenons maintenant à la réalité, ou à deux corps semi-

élastiques. Il paraîtrait naturel de poser

$$\mathfrak{T}_3 = \nu \mathfrak{T}_1,$$

ν étant une fraction dépendant de la nature des corps et peut-être de leur forme dans les environs de la zone du contact; alors on aurait

$$\Sigma m(v_3^2 - v_1^2) = -\mu \Sigma m w^2,$$

en posant $\mu = 1 - \nu$.

Mais on admet généralement que la perte de force vive est proportionnelle à la force vive due aux vitesses perdues après le choc, et l'on pose en conséquence

$$\Sigma m(v_3^2 - v_0^2) = -\varepsilon \Sigma m w_3^2,$$

ε étant un coefficient de même nature que μ.

Nous reconnaîtrons plus loin que les deux hypothèses que nous venons d'énoncer conduisent à des résultats de la même forme lorsque les corps M et M′ sont libres.

114. *Du mouvement que prennent deux corps choquants libres après le choc.* — Considérons d'abord le corps M dont G est le centre de gravité.

Soient

A le point de choc;
AX la direction de N, et AY, AZ deux axes rectangulaires perpendiculaires à AX;
X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du centre de gravité G;
Gx, Gy, Gz les parallèles en G à AX, AY, AZ.

Soient de plus, à l'instant où le choc finit,

V la vitesse de G;
W la vitesse de A estimée suivant AX;
n, p, q les composantes suivant Gx, Gy, Gz de la rotation instantanée ω autour de O.

Reportons-nous un instant au n° 91; nous avons

$$J = An^2 + Bp^2 + Cq^2 - 2H_{xy}np - \ldots = Mf(n, p, q),$$

$$P_x = \frac{M}{2}\frac{\partial f}{\partial n}, \qquad P_y = \frac{M}{2}\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad P_z = \frac{M}{2}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

L'indice o caractérisera les éléments qui se rapportent au commencement du choc.

La vitesse du centre de gravité G estimée dans le plan YAZ restant contraire en grandeur et en direction pendant la durée du choc n'intervient pas dans ces équations du mouvement, et l'on peut en faire abstraction, ce qui revient à considérer V_0 et V comme étant parallèles à AX.

Nous avons

$$(1) \qquad W = V - pZ_1 + qY_1, \qquad W_0 = \ldots,$$

et pour le mouvement de G

$$(2) \qquad M(V - V_0) = \int N\,dt.$$

Les équations du mouvement de M autour de son centre de gravité sont, en ayant égard à la valeur (2) de $\int N\,dt$,

$$\frac{1}{2}M\frac{\partial f(n,p,q)}{\partial n} - \frac{1}{2}M\frac{\partial f(n_0,\ldots)}{\partial n_0} = 0.$$

$$\frac{1}{2}M\frac{\partial f(n,\ldots)}{\partial p} - \frac{1}{2}M\frac{\partial f(n_0,\ldots)}{\partial p_0} = -Z_1\int N\,dt = -MZ_1(V - V_0),$$

$$\frac{1}{2}M\frac{\partial f(n,\ldots)}{\partial q} - \frac{1}{2}M\frac{\partial f(n_0,\ldots)}{\partial q_0} = \quad Y_1\int N\,dt = \quad MY_1(V - V_0),$$

d'où

$$\frac{\partial f(n-n_0, p-p_0, q-q_0)}{\partial(n-n_0)} = 0,$$

$$\frac{\partial f(n-n_0,\ldots)}{\partial(p-p_0)} = -2Z_1(V - V_0),$$

$$\frac{\partial f(n-n_0,\ldots)}{\partial(q-q_0)} = \quad 2Y_1(V - V_0).$$

En posant

$$(3) \quad n - n_0 = \alpha(V - V_0), \quad p - p_0 = \beta(V - V_0), \quad q - q_0 = \gamma(V - V_0),$$

on aura, pour déterminer α, β, γ, les équations du premier degré

$$(4) \quad \frac{\partial f(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\beta} = -2Z_1, \qquad \frac{\partial f(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\gamma} = 2Y_1.$$

Si l'on ajoute les équations (4) multipliées respectivement

par α, β, γ et, si l'on remarque que le premier membre de l'équation obtenue est égal à $2f(\alpha, \beta, \gamma)$, on obtient

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = -\beta Z_1 + \gamma Y_1,$$

et, comme par sa nature la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ est essentiellement positive, la quantité

$$(5) \qquad \lambda = 1 + f(\alpha, \beta, \gamma) = 1 - \beta Z_1 + \gamma Y_1$$

sera au moins égale à l'unité.

D'après le théorème de Kœnig, l'accroissement de la force vive après le choc est

$$F = M[V^2 - V_0^2 + f(n, \ldots) - f(n_0, \ldots)];$$

or

$$\begin{aligned} f(n, p, q) &= f[\alpha(V - V_0) + n_0, \beta(V - V_0) + p_0, \gamma(V - V_0) + q_0] \\ &= f[\alpha(V - V_0), \beta(V - V_0), \gamma(V - V_0)] \\ &\quad + \frac{\partial f[\alpha(V - V_0), \beta(V - V_0), \gamma(V - V_0)]}{\partial . \alpha(V - V_0)} n_0 \\ &\quad + \frac{\partial f[\alpha(V - V_0), \ldots]}{\partial . \beta(V - V_0)} p_0 + \frac{\partial f[\alpha(V - V_0) \ldots]}{\partial . \gamma(V - V_0)} q_0 + f(n_0, p_0, q_0); \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} & f(n, \ldots) - f(n_0, \ldots) \\ &= (V - V_0)^2 f(\alpha, \beta, \gamma) + (V - V_0)\left[n_0 \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} + p_0 \frac{\partial f(\alpha, \ldots)}{\partial \beta} + q_0 \frac{\partial f(\alpha, \ldots)}{\partial \gamma}\right] \\ &= (\lambda - 1)(V - V_0)^2 + (V - V_0)\left[n_0 \frac{\partial f(\alpha, \ldots)}{\partial \alpha} + p_0 \frac{\partial f(\alpha, \ldots)}{\partial \beta} + q_0 \frac{\partial f(\alpha, \ldots)}{\partial \gamma}\right], \end{aligned}$$

ou, vu (4),

$$f(n, \ldots) - f(n_0 \ldots) = (\lambda - 1)(V - V_0)^2 + 2(V - V_0)(-p_0 Z_1 + q_0 Y_1),$$

ou encore, vu (1),

$$f(n, \ldots) - f(n_0, \ldots) = (\lambda - 1)(V - V_0)^2 + 2(W_0 - V_0)(V - V_0).$$

On a donc

$$(6) \qquad F = M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0].$$

La force vive G, due aux vitesses perdues après le choc est égale à la somme des forces semblables du centre de gravité

où la masse serait concentrée et du corps dans son mouvement relatif par rapport à ce centre [1]; par suite,

$$\begin{aligned} G &= M(V - V_0)^2 + Mf[(n - n_0), \ldots] \\ &= M(V - V_0^2) + M(V - V_0)^2 f(\alpha, \ldots) \end{aligned}$$

ou

$$(7) \qquad G = M\lambda(V - V_0)^2.$$

Considérons maintenant l'ensemble de M, M'. Pour le second corps, on accentuera les lettres qui se rapportent au premier; mais, N devant être changé de signe dans l'équation (1), on a

$$M'(V' - V'_0) = -\int N\,dt,$$

d'où, par addition avec l'équation précitée,

$$(8) \qquad M(V - V_0) + M'(V' - V'_0) = 0.$$

Si l'on exprime que $F + F' = -\varepsilon(G + G')$, on trouve

$$\begin{aligned} &M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0] + M'(V' - V'_0)[\lambda'(V' - V'_0) + 2W'_0] \\ &\quad = -\varepsilon[M\lambda(V - V_0)^2 + M'\lambda'(V' - V'_0)^2], \end{aligned}$$

ou, en éliminant $M'(V' - V'_0)$ au moyen de (8) et supprimant le facteur $M(V - V_0)$,

$$\begin{aligned} &\lambda(V - V_0) + 2W_0 - [\lambda'(V' - V'_0) + 2W'_0] \\ &\quad = -\varepsilon[\lambda(V - V_0) - \lambda'(V' - V'_0)]. \end{aligned}$$

On déduit de cette équation et de l'équation (8)

$$(9) \quad V - V_0 = \frac{2M'(W'_0 - W_0)}{(1 + \varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')}, \quad V' - V'_0 = \frac{2M(W_0 - W'_0)}{(1 + \varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')}.$$

---

[1] Soient en général U la vitesse du centre de gravité, u la vitesse relative de m; la force vive due aux vitesses perdues est

$$\begin{aligned} \Sigma m[(U_{0x} + u_{0x} - U_x - u_x)^2 + \ldots] &= M[(U_{0x} - U_x)^2 + \ldots] + \Sigma m[(u_{0x} - u_x)^2 + \ldots] \\ &\quad + 2[U_{0x} - U_x)\,\Sigma m(u_{0x} - u_x)] + \ldots, \end{aligned}$$

et, comme $\Sigma m u_{0x} = 0$, $\Sigma u_x = 0$, on arrive au théorème invoqué.

L'équation (1) donne, en ayant égard à (3),

$$\begin{aligned} W - W_0 &= V - V_0 - (p - p_0)Z_1 + (q - q_0)Y_1 \\ &= (V - V_1)[1 - \beta Z_1 + \gamma Y_1] = \lambda(V - V_0), \end{aligned}$$

et l'on a une équation semblable pour M'; et, par l'élimination de $V - V_0$, $V' - V'_0$ au moyen de (9), on obtient

$$(10) \qquad \begin{cases} W = \dfrac{2\lambda M'(W'_0 - W_0)}{(1+\varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')} + W_0, \\ W' = \dfrac{2\lambda' M(W_0 - W'_0)}{(1+\varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')} + W'_0. \end{cases}$$

La moitié de la perte de force vive après le choc ou le travail perdu qui a été employé à déformer les corps est

$$\mathfrak{T} = \frac{\varepsilon(G + G')}{2} = \frac{\varepsilon}{2}[M\lambda(V - V_0)^2 + M'\lambda'(V' - V'_0)^2],$$

ou, vu (9),

$$(11) \qquad \mathfrak{T} = \frac{2\varepsilon MM'(W'_0 - W_0)^2}{(1+\varepsilon)^2(M'\lambda + M\lambda)}.$$

Dans le cas des corps mous d'élasticité ou de $\varepsilon = 1$, on a

$$(9') \qquad V - V_0 = \frac{M'(W'_0 - W_0)}{M'\lambda + M\lambda'}, \qquad V' - V'_0 = \frac{M(W_0 - W'_0)}{M'\lambda + M\lambda'},$$

$$(10') \qquad W = W' = \frac{M'\lambda W'_0 + M\lambda' W_0}{M'\lambda + M\lambda'},$$

$$(11') \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\,\frac{MM'(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'}.$$

La formule (10') montre qu'au point de choc les vitesses sont égales, ce qui devait être. La formule (11') s'applique à la première partie du choc de corps quelconques.

Si les corps sont parfaitement élastiques ou si $\varepsilon = 0$, on a

$$(9'') \qquad V - V_0 = \frac{2M'(W'_0 - W_0)}{M'\lambda + M\lambda}, \qquad V' - V'_0 = \frac{2M(W_0 - W'_0)}{M'\lambda + M\lambda}.$$

$$(10'') \qquad \begin{cases} W = \dfrac{2(\lambda M' W'_0 + \lambda' M W_0)}{M'\lambda + M\lambda} - W_0, \\ W' = \dfrac{2(\lambda M' W'_0 + \lambda' M W_0)}{M'\lambda + M\lambda} - W'_0. \end{cases}$$

On remarquera que : 1° vu (10′), le terme commun à W, W′ est le double de la vitesse au point de choc à l'instant de la plus grande compression; 2° $W'_0 - W_0 = W - W'$, c'est-à-dire que les vitesses relatives au point de choc sont égales et de sens contraire après le choc.

Voyons maintenant à quelles conséquences conduirait la première hypothèse que nous avons faite au n° 113 sur la perte de force vive après le choc. Nous avons, en nous reportant aux formules (6) et (11′),

$$\begin{aligned} &M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0] \\ &+ M'(V' - V'_0)[\lambda'(V' - V'_0) + 2W'_0] = -\mu\frac{MM'(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'}. \end{aligned}$$

Si l'on élimine $M'(V' - V'_0)$ au moyen de (8), on obtient

$$\begin{aligned} &(V - V_0)[(V - V_0) + 2W_0 - \lambda'(V' - V'_0) - 2W'_0] \\ &= -\mu M'\frac{(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'}, \end{aligned}$$

ou, en multipliant par M′ et remplaçant $M'(V' - V'_0)$ par sa valeur déduite de (8),

$$\begin{aligned} &(V - V_0)[(V - V_0)(M'\lambda + M\lambda') + 2M'(W_0 - W'_0)] \\ &= -\mu M'^2\frac{(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'}, \end{aligned}$$

d'où

$$V - V_0 = \frac{M'(W'_0 - W_0)}{M'\lambda + M\lambda'}(1 + \sqrt{1 - \mu}),$$

valeur qui s'accorde avec la première des valeurs (9) en posant

$$\mu = \frac{4\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

Dans le cas de $\varepsilon = 0,101$ qu'on rencontrera plus loin, on aurait $\mu = 0,333$.

Peu importe donc l'une ou l'autre hypothèse puisqu'on n'a qu'un coefficient à déterminer par l'expérience.

115. *Choc direct de deux corps libres.* — On dit que le choc est direct, quand la normale au point de choc passe par les

centres de gravité des deux corps; alors on a

$$0 = Y_1 = Z_1 = Y'_1 = Z'_1, \qquad 1 = \lambda = \lambda',$$

et, par suite, ce qui est visible *a priori*,

$$\begin{array}{llll} n = n_0, & p = p_0, & q = q_0, & n' = n'_0, \quad \ldots, \\ W = V, & W_0 = V_0, & W' = V', & W'_0 = V'_0 \end{array}$$

et

$$(1) \quad V - V_0 = \frac{2M'(V'_0 - V_0)}{(1+\varepsilon)(M+M')}, \qquad V - V'_0 = \frac{2M(V_0 - V'_0)}{(1+\varepsilon)(M+M')},$$

$$(2) \qquad \mathfrak{T} = \frac{2\varepsilon MM'(V'_0 - V_0)^2}{(1+\varepsilon)^2(M+M')}.$$

On arrive rapidement à ces équations en partant de celles-ci, qui sont évidentes,

$$M(V - V_0) + M'(V' - V'_0) = 0,$$
$$M(V^2 - V_0^2) + M'(V'^2 - V'^2_0) = -\varepsilon[M(V - V_0)^2 + M'(V' - V'_0)^2].$$

Nous allons faire quelques applications des formules (1) et (2).

1° *Corps parfaitement élastiques.* — Supposons que M′ soit en repos à l'instant du choc; nous avons

$$V = V_0 \frac{(M - M')}{M + M'}, \qquad V' = \frac{2MV_0}{M + M'}.$$

Si le rapport $\frac{M'}{M}$ est très grand, nous avons à peu près $V = -V_0$, $V' = 0$. Ce qui peut expliquer, jusqu'à un certain point, ce qui se passe dans le battage des semelles; la masse M′ du galet est bien supérieure à celle M du marteau et c'est pourquoi l'ouvrier n'éprouve pas d'impression sensible sur les genoux.

Considérons maintenant le choc d'une bille contre une bande de billard; les vitesses V_0, V sont nécessairement comprises dans un même plan normal à la bande; l'équation des forces vives conduit à $V_0 = V$. L'accroissement de la quantité de mouvement, en projection sur la bande étant nul, on conclut que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Les choses ne se passent pas exactement ainsi,

parce que la bande et la bille ne sont pas parfaitement élastiques et parce qu'il se développe au contact un frottement dont on a fait abstraction.

2° *Corps semi-élastiques.* — Considérons une bille M tombant verticalement, sans vitesse initiale, de la hauteur H sur une table de marbre M'; après le choc, elle s'élèvera à une hauteur $H' < H$.

Le rapport $\frac{M'}{M}$ étant très grand, V' doit être considéré comme nul et, en désignant par P le poids de la bille, la formule (2) donne

$$\mathfrak{T} = \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\frac{P}{g}V_0^2 = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}PH,$$

et l'on a

$$PH - \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}PH = PH',$$

d'où

$$\frac{H'}{H} = 1 - \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.$$

Coriolis a obtenu expérimentalement $\frac{H'}{H} = \frac{2}{3}$, ce qui correspond à $\varepsilon = 0,101$.

3° *Corps non élastiques.* — Les équations (1) donnent

$$V = V' = \frac{MV_0 + M'V'_2}{M + M'},$$

ce qu'on aurait pu écrire immédiatement.

Si M' est en repos à l'instant du choc, on a

$$\mathfrak{T} = \frac{M'}{M+M'}\frac{MV_0^2}{2},$$

expression dans laquelle $\frac{MV_0^2}{2}$ représente le travail dépensé pour communiquer à M la vitesse V_0. Selon que le rapport $\frac{M}{M'}$ est très grand ou très petit, la fraction $\frac{M'}{M+M'}$ est petite, ou voisine de l'unité. C'est ce qui explique pourquoi, pour enfoncer une pointe M', il convient d'employer un fort mar-

teau M, car autrement presque tout le travail dépensé serait employé à plier la pointe, et non à l'enfoncer.

Un *pieu* est une pièce de bois cylindrique dont une extrémité est terminée par une pointe durcie au feu ou est coiffée d'un *sabot* en fer ou en fonte. On enfonce verticalement un pieu dans le sol en laissant tomber sur sa tête une masse pesante appelée *mouton*. Soient $P = Mg$, $P' = M'g$ les poids du mouton et du pieu; H la hauteur de chute du mouton. On a

$$V_0 = \sqrt{2gH}, \qquad V'_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{T} = \frac{P'}{P + P'} PH.$$

Pour dépenser un même travail PH, il convient de prendre P très grand (en pratique P varie entre 200^{kg} et 1000^{kg}) pour réduire $\mathfrak{T}$.

Nous allons maintenant donner un aperçu sur la durée du choc de deux corps non élastiques. Soient

$P = Mg$, $P' = M'g$ les poids de deux cylindres se choquant sur leurs bases suivant leur axe commun;

$V_0 > V'_0$ leurs vitesses à l'instant où le choc commence;

φ l'effort moyen développé au contact pendant la durée θ du choc;

δ, δ' les dépressions éprouvées par M, M' après le choc.

On a

$$(3) \quad \varphi(\delta + \delta') = \frac{1}{2} \frac{MM'}{M + M'} (V_0 - V'_0)^2 = \frac{1}{2g} \frac{PP'}{P + P'} (V_0 - V'_0)^2,$$

et, en prenant approximativement $\int N\,dt = \varphi\theta$,

$$M(V - V_0) = -\varphi\theta, \qquad M'(V - V'_0) = \varphi\theta,$$

d'où, par l'élimination de V,

$$\theta = \frac{MM'}{\varphi(M + M')} (V_0 - V'_0).$$

Si l'on élimine φ au moyen de l'équation (3), on trouve

$$\theta = \frac{2(\delta + \delta')}{V_0 - V'_0}.$$

Nous emprunterons à Poncelet l'exemple suivant :

Un poids en fonte $P = 300^{kg}$ tombe de la hauteur $H = 1^m,50$ sur un sol argileux ; δ est négligeable ; on a observé $\delta' = 0^m,02$; on a $V'_0 = 0$, $V_0 = \sqrt{2gH} = 5^m$, et la formule précédente donne $\theta = 0,008$.

116. *Choc de deux corps dont l'un* M *est libre et l'autre* M′ *est assujetti à tourner autour d'un axe fixe* OZ′. — On prendra pour origine le pied O de la perpendiculaire abaissée de G′ sur OZ′; OY′ sera dirigé suivant OG′. On choisira le sens de OX′ de manière que la projection de $\int N\,dt$ sur sa direction soit positive.

On devra se reporter, pour les notations et les formules relatives à M, au n° 111.

Soient

$OG' = l$;

a, b, c les coordonnées du point de choc A parallèles à OX′, OY′, OZ′;

I′ le moment de M′ par rapport à OZ′;

α, β, γ les angles de AX ou $\int N\,dt$ avec OX′, OY′, OZ′;

ω'_0, ω' les vitesses angulaires de M′ autour de OZ′ avant et après le choc, censées positives de la gauche vers la droite en se couchant suivant Z′O.

On a d'abord, pour M,

$$(1)\qquad \begin{cases} F = M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0], \\ G = M\lambda(V - V_0)^2, \\ M(V - V_0) = \int N\,dt. \end{cases}$$

Les moments de $-\int N\,dt$ par rapport à OX′, OY′, OZ′ sont

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_{X'} = (c\cos\beta - b\cos\gamma)\int N\,dt, \\ \mathfrak{M}_{Y'} = (a\cos\gamma - c\cos\alpha)\int N\,dt, \\ \mathfrak{M}_{Z'} = (b\cos\alpha - a\cos\beta)\int N\,dt. \end{cases}$$

On a, pour le corps M′, en prenant les moments par rapport à OZ′,

$$(3)\qquad I'(\omega' - \omega'_0) = (b\cos\alpha - a\cos\beta)\int N\,dt,$$

ou, en vertu de la troisième des équations (1),

$$(4)\qquad I'(\omega'-\omega'_0)=(b\cos\alpha-a\cos\beta)M(V-V_0).$$

L'équation de la force vive donne

$$\begin{aligned}&M(V-V_0)[\lambda(V-V_0)+2W_0]+I'(\omega'^2-\omega'^2_0)\\&=-\varepsilon[M\lambda(V-V_0)^2+I'(\omega'-\omega'_0)^2],\end{aligned}$$

ou, en éliminant $I'(\omega'-\omega'_0)$ au moyen de l'équation (4),

$$\begin{aligned}&\lambda(1+\varepsilon)(V-V_0)+(1+\varepsilon)(b\cos\alpha-a\cos\beta)\omega'\\&=-2W_0-(1-\varepsilon)(b\cos\alpha-a\cos\beta)\omega'_0,\end{aligned}$$

et enfin, en éliminant $(V-V_0)$ au moyen de l'équation précitée,

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}&(1+\varepsilon)[\lambda I'+M(b\cos\alpha-a\cos\beta)^2]\omega'\\&=[(1+\varepsilon)\lambda I'-(1-\varepsilon)M(b\cos\alpha-a\cos\beta)^2]\omega'_0\\&\quad-2M(b\cos\alpha-a\cos\beta)W_0.\end{aligned}\right.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer les conditions qui doivent être remplies pour que les guides de l'axe OZ′ ne reçoivent pas de *percussions* (impulsions des pressions).

Nous avons d'abord, en projection sur OY′, OZ′,

$$\cos\beta\,\Sigma\int N\,dt=0,\qquad\cos\gamma\int N\,dt=0,$$

ce qui exige que $\beta=\gamma=90^\circ$, condition que nous supposerons remplie. Les équations (2) se réduisent alors aux suivantes

$$(2')\qquad \mathfrak{M}_{X'}=0,\qquad \mathfrak{M}_{Y'}=-c\int N\,dt,\qquad \mathfrak{M}_{Z'}=b\int N\,dt.$$

En projetant sur OX′, on a

$$(6)\qquad M'l(\omega'-\omega'_0)=\int N\,dt,$$

ou, en éliminant l'impulsion au moyen de l'équation (3),

$$(7)\qquad I'=M'lb,$$

ce qui exprime que le point de choc doit se trouver dans le plan parallèle à X′OZ′ passant par le centre d'oscillation de M′. La vitesse du point m de M′, dont les coordonnées sont x, y, z, due à la rotation ω', ayant pour composantes $\omega' x$,

$-\omega' y$ suivant OY′, OX′, on a

$$-(\omega'-\omega'_0)\Sigma mxz = \mathfrak{M}_{X'}, \qquad -(\omega'-\omega'_0)\Sigma myz = \mathfrak{M}_{Y'}$$

ou, vu (2′) et (3) pour l'élimination de l'impulsion,

$$\Sigma mxz = 0,$$
$$c = \frac{b\Sigma myz}{I'}.$$

Donc, pour que la direction de V_0 passe par le centre d'oscillation (appelé ici *centre de percussion*) ou que c soit nul, il faut que OZ′ soit un axe principal d'inertie.

En y faisant $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90°$, les équations (4) et (5) donnent

$$(4') \qquad I'(\omega'-\omega'_0) = Mb(V-V_0),$$

$$(5') \qquad \omega'-\omega'_0 = -\frac{2(b\omega'+W_0)Mb}{(1+\varepsilon)(\lambda I'+Mb^2)}.$$

Supposons que les corps soient dénués d'élasticité, que la normale au point de choc passe par le centre de gravité de M, et que $\omega_0 = 0$, on a $\varepsilon = 1$, $\lambda = 1$, $W_0 = V_0$ et les deux équations précédentes donnent

$$(5'') \qquad \omega' = -\frac{MbV_0}{I'+Mb^2}, \qquad V = V_0\frac{Mb^2}{I'+Mb^2} = -b\omega'.$$

117. *Pendule balistique ou de Robins.* — Cet appareil, qui a pour objet de mesurer les vitesses initiales des gros projectiles, consiste en une enveloppe tronconique en fonte, dont la petite base est remplacée par une calotte sphérique. L'enveloppe est reliée, par des tringles, à un axe fixe horizontal perpendiculaire à son axe de figure. Elle renferme du sable maintenu par une feuille de plomb qui ferme l'ouverture de la grande base. Un index, fixé à la partie inférieure de l'enveloppe, peut circuler dans une rainure circulaire, graduée en degrés et en secondes, et qui renferme de la cire ou du sable fin. Lorsqu'un projectile a frappé la masse suivant son axe de figure, l'index décrit un arc qu'on constate et qui permet d'évaluer la vitesse initiale. Le poids du projectile est négligeable devant celui du pendule.

Soient

$P = Mg$, $P' = M'g$ les poids du projectile et du pendule;
l la distance du centre de gravité G' de M' à l'axe de rotation;
I' le moment d'inertie de M' par rapport à cet axe, qu'on détermine expérimentalement;
b la distance du point de choc à l'axe.

Il est inutile d'avoir recours aux formules du numéro précédent dont nous nous bornerons à conserver les notations; car, en prenant les moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe fixe, on voit immédiatement que $I'\omega' = \frac{P}{g} V_0 b$, d'où

$$\omega' = \frac{P}{g} \frac{V_0 b}{I'}. \tag{1}$$

Si l'on suit le mouvement du pendule après le choc, on a, en désignant par ω la vitesse angulaire du pendule correspondant à l'écart angulaire de θ,

$$\frac{I'}{2}(\omega^2 - \omega')^2 = -P'l(1 - \cos\theta).$$

La rotation ω s'annule pour l'écart maximum observé $\theta = \alpha$, par suite

$$\omega' = 2\sqrt{\frac{P'l}{I'}} \sin\frac{\alpha}{2},$$

et, en éliminant ω' au moyen de l'équation (1),

$$V_0 = \frac{2g}{Pb}\sqrt{P'I'l} \sin\frac{\alpha}{2},$$

formule dans laquelle on peut faire sans inconvénient $b = l$.

118. *Du recul dans les armes à feu.* — S'il s'agit d'une pièce d'artillerie, on supposera que l'axe de la bouche à feu est horizontal. Soient

P, p les poids de la pièce et du projectile;
v la vitesse du projectile à sa sortie de l'âme;
V la vitesse de recul en valeur absolue;

q le poids et w la vitesse d'une particule de la charge;
p' le poids de la charge.

On a

$$\frac{p}{g}v + \sum \frac{q}{g} w - \frac{P}{g} V = 0.$$

La vitesse w est inconnue, mais ses valeurs extrêmes peuvent être considérées comme étant v et $-V$; et, comme en général le rapport $\frac{p'}{p}$ ne dépasse pas $\frac{1}{4}$, on peut sans grande erreur prendre $w = \frac{v - V}{2}$ et la formule précédente donne

$$V = \frac{p + \frac{p'}{2}}{P + \frac{p'}{2}} v = \frac{p + \frac{p'}{2}}{P} v.$$

Le *fusil pendule* sert à évaluer la vitesse initiale d'une balle; il est suspendu à un axe fixe par des tringles aboutissant à la crosse et au canon, de manière que le canon soit horizontal.

Soient

I' le moment d'inertie du fusil par rapport à l'axe;
v la vitesse de la balle à la sortie de l'arme;
ω' la vitesse angulaire correspondante du fusil;
p, p' les poids du projectile et de la charge.

On peut écrire

$$I\omega' = \left(\frac{p + \frac{p'}{2}}{g}\right) v.$$

La valeur de ω' se déduira de l'écart angulaire maximum du fusil comme pour le pendule de Robins et la formule précédente fera connaître la vitesse initiale v.

APPENDICE.

ASTATIQUE.

I. On désigne ainsi une branche secondaire de la Statique des solides qui est, en quelque sorte, la théorie de l'équilibre indifférent.

On dit qu'un solide est en *équilibre astatique* lorsque les forces de directions invariables dans l'espace appliquées en des points définis du solide se font équilibre quelle que soit la position du solide.

Soient O un point du solide choisi arbitrairement; Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires de directions fixes dans l'espace auxquelles on rapportera les forces $F, F', F'', \ldots, F^i, \ldots$ appliquées aux points (x^i, y^i, z^i) du solide.

Le transfert de la position actuelle du solide à une autre position s'effectuera par une translation rectiligne OO' et par une rotation autour de O'; mais la translation ne modifie en rien les conditions d'équilibre ordinaire; il n'y a donc à considérer qu'un déplacement gyratoire du solide autour de O, de manière à amener en (Ox', y', z') le système (Ox, y, z) considéré d'abord comme fixe dans le corps.

Le système (F^i) est équivalent aux systèmes (X^i), (Y^i), (Z^i) ayant les mêmes points d'application et parallèles à Ox, Oy, Oz.

Pour que (F^i) soit en équilibre astatique, il faut et il suffit qu'il en soit de même de chacun des groupes (X^i), (Y^i), (Z^i), et, d'après le n° 49, on devra avoir

$$\begin{array}{llll}
\Sigma X = 0, & \Sigma Xx = 0, & \Sigma Xy = 0, & \Sigma Xz = 0, \\
\Sigma Y = 0, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\Sigma Z = 0, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Il faut donc que les F^i satisfassent à douze conditions pour qu'il y ait équilibre astatique.

Si ces conditions ne sont pas remplies, on peut se proposer de déterminer un système de forces équivalant à (F^i), mais plus simple, qui, changé de sens, ferait équilibre astatique à (F^i).

II. *La résultante de translation* $\overline{\Sigma X} + \overline{\Sigma Y} + \overline{\Sigma Z}$ *n'est pas nulle.*

Introduisons la force $-R$ pour rétablir l'équilibre de translation et prenons Oz parallèle à R. Nous avons

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = R.$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} \Sigma X_x &= A_x, & \Sigma X_y &= A_y, & \Sigma X_z &= A_z, \\ \Sigma Y_x &= B_x, & \Sigma Y_y &= B_y, & \Sigma Y_z &= B_z, \\ \Sigma Z_x &= C_x, & \Sigma Z_y &= C_y, & \Sigma Z_z &= C_z. \end{aligned}$$

Soient OU une droite faisant les angles α, β, γ avec Ox, Oy, Oz; (x_1, y_1, z_1) le centre des forces F^i estimées parallèlement à OU; on a

$$x_1 = \frac{\Sigma(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)x}{R\cos\gamma}$$

ou

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{A_x\cos\alpha + B_x\cos\beta + C_x\cos\gamma}{R\cos\gamma} & \text{et de même} \\ y_1 = \dfrac{A_y\cos\alpha + B_y\cos\beta + C_y\cos\gamma}{R\cos\gamma}, \\ z_1 = \dfrac{A_z\cos\alpha + B_z\cos\beta + C_z\cos\gamma}{R\cos\gamma}. \end{cases}$$

Si l'on élimine $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ entre ces trois équations, on obtient une relation linéaire entre x_1, y_1, z_1.

Donc *les centres des forces parallèles pour toutes les positions de* OU *sont situés dans un plan* dit CENTRAL, et, *comme ces centres sont fixes dans le corps, quelle que soit sa position, il en est de même du plan central.*

En plaçant l'origine au centre des forces parallèles à R, on doit avoir $o = x_1 = y_1 = z_1$ pour $90° = \alpha = \beta$, $\gamma = o$, par suite les C sont nuls.

Faisons tourner le corps autour de O, de manière que le plan central coïncide avec xOy; on doit avoir $z_1 = o$, quels que soient $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, par suite

$$o = A_z = B_z.$$

Soient, dans le plan central, deux axes fixes rectangulaires Ox'', Oy'' définis par $\theta = \widehat{x''Ox}$; faisons tourner le corps autour de Oz de $\theta - \varphi$, de manière à amener les axes Ox, Oy fixes dans le corps en Ox', Oy'; on a $x' = x$, $y' = y$,

$$x'' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y'' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$
$$X'' = X\cos\theta + Y\sin\theta, \qquad Y'' = -X\sin\theta + \quad\cos\theta;$$

d'où

$$\Sigma X''y'' + \Sigma Y''x'' = (B_y - A_x)\sin(\theta + \varphi) + (A_y + B_x)\cos(\theta + \varphi),$$
$$\Sigma X''y'' - \Sigma Y''x'' = (A_x + B_y)\sin(\theta - \varphi) + (A_y - B_x)\cos(\theta - \varphi).$$

On peut déterminer $\theta + \varphi$, $\theta - \varphi$, de manière à annuler ces deux expressions, et alors

$$o = \Sigma X''y'' = \Sigma Y''x''.$$

Prenons maintenant pour axes fixes Ox'', Oy'' en supprimant les accents; nous avons

$$o = A_y = B_x.$$

Il ne reste plus alors que les constantes A_x, B_y, R.

La position actuelle du corps est dite *réduite,* et les nouveaux axes Ox, Oy sont les *lignes centrales;* les plans zOx, zOy sont les *sections centrales.* Comme $\mathfrak{M}_x = \Sigma(Zy - Yz)$, $\mathfrak{M}_y = \Sigma(Xz - Zy)$, $\mathfrak{M}_z = \Sigma(Yx - Xy)$ sont indépendants de A_x, B_y, ils sont nuls. Si l'on fait tourner le corps de 180° autour de Ox, x, par suite A_x ne fait que changer de signe, et l'on a toujours $\mathfrak{M} = o$.

Il en est encore de même si l'on fait tourner de la même manière le corps autour de Oy, Oz. Nous avons donc déjà

quatre positions pour lesquelles les forces F^i se réduisent à une résultante.

Cherchons à voir s'il n'existe pas d'autres positions pour lesquelles les forces se réduisent à une seule, qui, d'après ce qu'on sait, sera parallèle à R. Comme, dans ce qui suit, $\frac{A_x}{R}$, $\frac{B_y}{R}$ jouent seuls un rôle, on prendra, pour simplifier, $R = 1$.

Soient

$Ox'y'z'$ une position quelconque du corps;
OA l'intersection de xOy, $x'O'y'$;
$\varphi = \widehat{AOx}$, $\psi = \widehat{x'OA}$, $\theta = \widehat{z'Oz}$;
X', Y', Z' les composantes de F suivant Ox', Oy', Oz';
$\mathfrak{M}$ le moment des F^i par rapport à O dans la position $Ox'y'z'$.

On a

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} X' &= X(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad + Y(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + Z\sin\psi\sin\theta, \\ Y' &= -X(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ &\quad + Y(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + Z\cos\psi\sin\theta, \\ Z' &= X\sin\varphi\sin\theta - Y\cos\varphi\sin\theta + Z\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là, en se rappelant que les C sont nuls, que $0 = A_y = B_x = A_z = B_z$, $0 = \Sigma X = \Sigma Y$, $1 = \Sigma Z$, et supprimant, pour simplifier l'écriture des indices de A_x, B_y,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} R_{x'} &= \sin\psi\sin\theta, \\ R_{y'} &= \cos\psi\sin\theta, \\ R_{z'} &= \cos\theta, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}'_{x'} &= \Sigma(Z'y - Y'z) = -B\cos\varphi\sin\theta, \\ \mathfrak{M}'_{y'} &= \Sigma(X'z - Z'x) = -A\sin\varphi\sin\theta, \\ \mathfrak{M}'_{z'} &= \Sigma(Y'x - X'y) = -A(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ &\qquad\qquad - B(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta). \end{aligned}\right.$$

Supposons que la position (S') soit telle que les forces aient une résultante unique. La condition

$$\mathfrak{M}'_{x'}R_{x'} + \mathfrak{M}'_{y'}R_{y'} + \mathfrak{M}'_{z'}R_{z'} = 0$$

devient

$$(5)\qquad \begin{cases} -A(\cos\varphi\sin\psi\cos\theta+\sin\varphi\cos\psi) \\ -B(\sin\varphi\cos\psi\cos\theta+\cos\varphi\sin\psi)=0 \end{cases}$$

ou

$$(A\tang\psi+B\tang\varphi)\cos\theta+A\tang\varphi+B\tang\psi=0.$$

On peut se donner arbitrairement θ et φ, et ψ sera déterminé.

Il y a donc une infinité de positions du corps pour lesquelles les forces F' ont une résultante unique.

Soient χ, η, ζ les coordonnées parallèles à Ox', Oy', Oz' d'un point quelconque de la résultante unique. Les équations $\mathfrak{M}'_{x'}=R_{z'}\eta-R_{y'}\zeta$, $\mathfrak{M}'_{y'}=R_{x'}\zeta-R_{z'}\chi$ de la direction de cette résultante deviennent

$$(6)\qquad \begin{cases} -B\cos\varphi\sin\theta=\eta\cos\theta-\zeta\cos\psi\sin\theta, \\ -A\sin\varphi\sin\theta=\zeta\sin\psi\sin\theta-\chi\cos\theta. \end{cases}$$

Considérons la trace b' de la direction de la résultante unique sur le plan $z'Oy'$; on a, pour $\chi=0$,

$$(7)\qquad \zeta=-\frac{A\sin\varphi}{\sin\psi}$$

et

$$\eta\cos\theta=-(A\sin\varphi\cos\psi+B\cos\varphi\sin\psi)\frac{\sin\theta}{\sin\psi};$$

mais (5) donne

$$(5')\quad -(A\sin\varphi\cos\psi+B\cos\varphi\sin\psi)=(A\cos\varphi\sin\psi+B\sin\varphi\cos\psi)\cos\theta,$$

par suite

$$(8)\qquad \eta=(A\cos\varphi\sin\psi+B\sin\varphi\cos\psi)\frac{\sin\theta}{\sin\psi}.$$

De l'équation (5') on tire

$$\cos\theta=-\frac{A\sin\varphi\cos\psi+B\cos\varphi\sin\psi}{A\cos\varphi\sin\psi+B\sin\varphi\cos\psi}.$$

Si, dans $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, on réduit au même dénominateur, qu'on remplace au numérateur les cosinus carrés en fonction des sinus carrés, on trouve

$$\sin^2\theta=\frac{(A^2-B^2)(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)}{(A\cos\varphi\sin\psi+B\sin\varphi\cos\psi)^2}.$$

En égalant cette valeur à celle qu'on déduit de (8), on obtient

$$\eta^2 \sin^2\psi = (A^2 - B^2)(\sin^2\psi - \sin^2\varphi).$$

Si l'on élimine $\sin\varphi$ au moyen de (7), on trouve la relation suivante entre les coordonnées ζ, η du point b'

$$(9) \qquad \frac{\zeta^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{A^2 - B^2} = 1.$$

On trouverait de même, pour l'intersection a' de la résultante unique avec le plan $Z'Ox'$,

$$(10) \qquad \frac{\zeta^2}{B^2} + \frac{\chi^2}{B^2 - A^2} = 1.$$

Soient b, a les positions des points b', a' du corps dans sa position réduite, situées naturellement dans les plans ZOy, ZOx; dans toutes les positions du corps pour lesquelles il y a une résultante unique, les lieux de b, a seront les coniques représentées par (9), (10). En rabattant ZOy sur ZOx, l'une des coniques est une ellipse, l'autre une hyperbole; les sommets de l'une sont aux foyers de l'autre; en d'autres termes, les coniques sont focales.

Supposons qu'on se donne la droite ab; pour obtenir la position correspondante du corps, il faudra le faire tourner autour de O, de manière que ab vienne dans le sens voulu, parallèle à Oz. Tel est le véritable sens qu'on doit attribuer au théorème de Minding.

La solution précédente ne comprend pas la position réduite et les trois qui en dérivent. Ces quatre dernières solutions sont donc singulières.

III. *Réduction des forces lorsque la résultante de translation est nulle.*

Trois des conditions d'équilibre sont satisfaites.

Soient

Ox, Oy, Oz trois axes de directions fixes menés par un point O du corps;

R une force qu'on applique au point O faisant les angles λ, μ, ν avec ces axes;

u, v, w les coordonnées du centre O′ des composantes des F^i parallèles à R du système de R et des F^i.

On a, les A, B, C ne se rapportant évidemment qu'aux F^i,

$$\begin{aligned} Ru &= A_x \cos\lambda + B_x \cos\mu + C_x \cos\nu, \\ v &= A_y \cos\lambda + B_y \cos\mu + C_y \cos\nu, \\ Rw &= A_z \cos\lambda + B_z \cos\nu + C_z \cos\nu. \end{aligned}$$

Cherchons à voir si l'on ne peut pas choisir la direction (λ, μ, ν), de manière que O′ se trouve sur la direction de R. En posant $l = OO'$, on a $u = l\cos\lambda$, $v = l\cos\mu$, $w = l\cos\nu$, par suite

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{A_x \cos\lambda + B_x \cos\mu + C_x \cos\nu}{\cos\lambda} \\ &= \frac{A_y \cos\lambda + \ldots}{\cos\mu} = \frac{A_z \cos\lambda + \ldots}{\cos\nu} = Rl. \end{aligned} \right.$$

En éliminant $\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$, $\frac{\cos\mu}{\cos\nu}$ entre les trois valeurs de Rl, on obtient une équation du troisième degré en Rl qui a, au moins, une racine réelle. Cette racine étant supposée connue, deux des équations (a) feront connaître $\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$, $\frac{\cos\mu}{\cos\nu}$ et, par suite, des valeurs réelles pour λ, μ, ν.

Dirigeons maintenant Oz suivant R et reportons-nous aux équations (1), où (x_1, y_1, z_1), (α, β, γ) se rapportent à une droite quelconque OU. Comme pour $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 0$, on doit avoir $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = l$, il faut que

$$0 = C_x = C_y, \qquad C_z = Rl;$$

par suite

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_x \cos\alpha + B_x \cos\beta}{R\cos\gamma}, \\ y_1 &= \frac{A_y \cos\alpha + B_y \cos\beta}{R\cos\gamma}, \\ z_1 - l &= \frac{A_z \cos\alpha + B_z \cos\gamma}{R\cos\gamma}. \end{aligned}$$

Transportons le plan xOy parallèlement à lui-même en O′ dont on supprimera l'accent, ce qui revient simplement à

remplacer $z_1 - l$ par z_1. On retombe alors sur le premier cas examiné, et où la résultante de translation n'est pas nulle. En dirigeant Ox, Oy suivant les lignes principales, on a $0 = A_z = B_z = A_y = B_x$ et, d'après ce qu'on a vu plus haut, $\mathfrak{M}_x = 0$, $\mathfrak{M}_y = 0$, $\mathfrak{M}_z = 0$, par suite quatre positions d'équilibre. Cherchons s'il n'y en a pas d'autres.

Faisons d'abord tourner le corps de l'angle φ autour de Oz, de manière à amener xOy en $x'Oy'$. On a

$$X' = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad Y' = Y\cos\varphi + X\sin\varphi;$$

d'où

$$0 = \mathfrak{M}'_{x'} = \mathfrak{M}'_{y'}, \qquad \mathfrak{M}'_{z'} = (A_z + B_y)\sin\varphi;$$

pour que $\mathfrak{M}'_z$ soit nul, il faut que

$$B_y = -A_x. \tag{9}$$

Nous supposerons cette condition remplie, et le corps pourra occuper une position quelconque autour de Oz.

Soit $Ox'y'z'$ une position du corps définie par θ, φ, ψ; on déduit des formules (2)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{M}'_{x'} &= -\sin\theta(\quad B_y\cos\varphi + C_z\cos\psi)\\
&= -\sin\theta(-A_x\cos\varphi + C_z\cos\psi),\\
\mathfrak{M}'_{y'} &= \quad\sin\theta(\quad C_z\sin\psi - A_x\sin\varphi),\\
\mathfrak{M}'_{z'} &= -A_x(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\\
&\qquad - B_y(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\\
&= \quad A_x(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)(1 - \cos\theta).
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer que $\mathfrak{M}' = 0$. La solution $\theta = 0$ doit être écartée, puisqu'elle est satisfaite par (9).

Si A_x n'est pas nul, la troisième équation (10) donne $\psi = \varphi$, et les deux autres

$$C_z = A_x = -B_y.$$

Pour une position déterminée du plan $x'Oy'$, c'est-à-dire pour θ et φ donnés, il n'y aura qu'une position correspondante $(Ox'y'z')$ d'équilibre du solide. Il y aura donc une infinité de positions d'équilibre et une infinité d'autres qui ne le sont pas.

Pour qu'il y ait équilibre, quels que soient φ, ψ et θ, vu la

troisième équation (10), il faut que $A_x = 0 = -B_y$ et vu les deux autres $C_z = 0$, ce qui devait être.

Solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe Ox. — Si l'on fait tourner le corps de l'angle φ autour de Ox, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}'_x &= \Sigma[(Z\cos\varphi - Y\sin\varphi)y - (Y\cos\varphi + Z\sin\varphi)z] \\ &= \cos\varphi(C_y - B_z) - (B_y + C_z)\sin\varphi.\end{aligned}$$

Pour

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{C_y - B_z}{B_y + C_z},$$

il y aura équilibre; d'où deux positions d'équations diamétrales (φ, $\varphi + 180°$).

Pour l'équilibre astatique (quel que soit φ), il faut que

$$C_y = B_z, \qquad B_y = -C_z.$$

Solide mobile autour d'un point fixe O. — En introduisant la réaction du point fixe parmi les forces extérieures, elle ne donnera aucun terme dans les A, B, C, et l'on rentre dans le cas d'un corps libre lorsque la résultante de translation est nulle.

FIN DU TOME PREMIER.

21285 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.